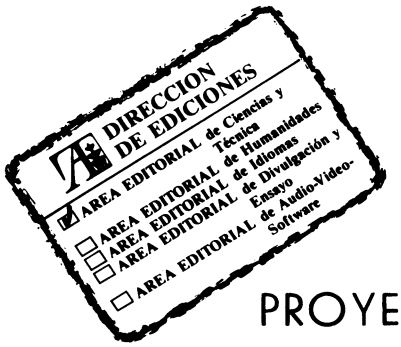
SERIE A

Cerca de la MATEMATICA (2)

Análisis básico · Algebra lineal · Geometría

ADOLFO NEGRO · VALERIANO ZORIO

politécnica
anaima
librería
senador castillo olivares, 5
tfno.37 32 20 las palmas



PROYECTO **MT-62** ALHAMBRA

COMITE EDITORIAL

Adolfo Negro

Fernando Marín Alonso

José M. Esteban

Departamentos

Coordinación, control y seguimiento
Ciencias de la Naturaleza
Ciencias de la Educación
Lengua y Literatura
Socioantropología
Matemáticas
Química
Física

PROYECTO

ALHAMBRA

non scholae sed vitae discere

CERCA DE LA MATEMATICA (2)

Análisis básico
Algebra lineal
Geometría

ADOLFO NEGRO

VALERIANO ZORIO

Alhambra

Primera edición, 1975
Segunda edición, 1980
Reimpresión, 1984

EDITORIAL ALHAMBRA, S.A.
R.E. 182
28001 Madrid. Claudio Coello, 76

Delegaciones:

08008 Barcelona. Enrique Granados, 61
48014 Bilbao. Iruña, 12
18009 Granada. Pza. de las Descalzas, 2
15005 La Coruña. Pasadizo de Pernas, 13
28002 Madrid. Saturnino Calleja, 1
33006 Oviedo. Avda. del Cristo, 9
38004 Santa Cruz de Tenerife. General Porlier, 14
41012 Sevilla. Reina Mercedes, 35
46003 Valencia. Cabillers, 5
50005 Zaragoza. Concepción Arenal, 25

México
Editorial Alhambra Mexicana, S.A.
Avda. División del Norte, 2412
03340 México, D.F.

n c 12040059

ISBN 84-205-0719-9 (obra completa)

ISBN 84-205-0708-3 (vol. 2)

Depósito legal: M. 40919

© Es propiedad de los autores.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad, ni parte de este libro pueden reproducirse o transmitirse, utilizando medios electrónicos o mecánicos, por fotocopia, grabación, información, anulado, u otro sistema, sin permiso por escrito del editor.

Ilustraciones: Editorial Alhambra, S.A.
Cubierta: Editorial Alhambra, S.A.
Fotocomposición: Compoprint, S.A.
Fotomecánica: La Unión, S.A.
Impresión: Selecciones Gráficas
Papel: Kanguros
Encuadernación: Gómez Pinto, S.A.

Impreso en España - Printed in Spain

Selecciones Gráficas - Carretera de Irún, km. 11,500 - Madrid (1984)

Indice general

Capítulos *Páginas*

4. ANALISIS BASICO

4.1 El número real 5

Introducción, 5. Sucesiones de números racionales, 6. Operaciones con sucesiones, 7. Valor absoluto de un número racional, 8. Entorno de un número racional, 10. Límite de una sucesión de números racionales, 10. Propiedades de las sucesiones nulas, 11. Sucesiones de Cauchy de números racionales, 12. Operaciones con sucesiones de Cauchy, 15. Representación en diagramas de Venn de los distintos tipos de sucesiones, 17. Definición de número real, 17. Operaciones con números reales, 18. Elementos simétricos en $\mathfrak{R}$. El cuerpo de los números reales, 21. El cuerpo de los números racionales como subcuerpo de los números reales, 24. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 24.

4.2 Ordenación en el cuerpo 29

Números reales positivos y negativos, 29. Regla de los signos, 31. Relación de orden en $\mathfrak{R}$, 32. Coincidencia de la relación de orden en $\mathfrak{R}$ con la establecida en Q, 33. El cuerpo ordenado $\mathfrak{R}$, 33. Relaciones en consecuencias de ser un cuerpo ordenado $\mathfrak{R}$, 34. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 34.

4.3 Topología de la recta real 39

Introducción, 39. Representación en la recta de los números racionales, 39. Estudio de la aplicación de Q en R, 42. Teorema de la biyección $\mathfrak{R} \to R$, 42. Valor absoluto. Entornos, 46. Intervalos abiertos y cerrados, 47. Puntos interiores de un conjunto, 48. «Conjuntos abiertos» o simplemente «abiertos», 49. Puntos de acumulación, 51. Puntos frontera, 52. Puntos exteriores, 53. Puntos aislados, 53. Puntos adherentes, 54. Proposiciones consecuencia de las anteriores definiciones. Cuadro resumen, 54. Topología, 55. Teorema de Bolzano-Weierstrass, 56. «Conjuntos cerrados» o simplemente «cerrados», 56. Conjuntos compactos. Teorema de Heine-Borel, 58. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 59.

4.4 Acotaciones en el conjunto $\mathfrak{R}$ 63

Introducción, 63. Cotas. Extremos de conjuntos acotados, 63. Conjuntos acotados de números reales, 65. Sucesiones de Cauchy de números reales, 67. Límites superior e inferior de un conjunto de números reales, 68. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 70.

4.5 Funciones reales de una variable real 73

Introducción, 73. Definición de función, 74. Función real de variable real. Gráficas, 76. Funciones multiformes. Ramas. Puntos de ramificación, 79.

Función inversa, 80. Funciones unívocas o «uno a uno», 81. Composición de funciones, 84. Algunos tipos particulares de funciones, 86. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 89.

4.6 Límite de funciones 93

Introducción, 93. Concepto vulgar de límite, 93. Definición de límite de una función, 96. Límites por la derecha y por la izquierda, 103. Propiedades de límites, 109. Operaciones con límites, 111. Límite de $1/f(x)$ en función del límite de $f(x)$, 115. Límite de un cociente de funciones, 116. Infinitésimos, 116. Cálculo de algunos límites (exponencial y logarítmico), 120. Límites indeterminados, 122. Estudio de algunos infinitésimos, 124. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 129.

4.7 Funciones continuas. Puntos de discontinuidad 133

Introducción, 133. Función continua, 133. Semicontinuidad por la derecha y por la izquierda, 135. Puntos de discontinuidad, 136. Propiedades de las funciones continuas, 140. Ejemplos de continuidad y de discontinuidad, 144. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 149.

4.8 Aproximación lineal. Derivados y diferencial 153

Aproximación de una función por otra en un punto, 153. Aproximación lineal de una función en un punto, 154. Derivada de una función en un punto, 155. Diferencial de una función en un punto, 157. Continuidad de la función derivable, 158. Cálculo de derivadas, 159. Curvas osculatrices a una curva en un punto, 162. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 164.

4.9 Funciones derivables. Estudio local. Gráficas 167

Variación de una función acotada, 167. Variación de una función derivable, 170. Teorema de Rolle, 171. Teorema de Cauchy, 173. Teorema de la media generalizada, 175. Desarrollo de Taylor, 177. Aplicaciones del desarrollo de Taylor, 180. Concavidad, convexidad e inflexiones, 182. Estudio de la gráfica de una función derivable, 187. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 189.

4.10 Integrales indefinidas 193

Definición de integral indefinida o función primitiva, 193. La función primitiva no es única, 193. Funciones integrales, 194. Integrales inmediatas, 195. Funciones hiperbólicas, 196. Derivación e integración de funciones hiperbólicas e inversas, 199. Carácter lineal de la integración, 201. Método de sustitución, 201. Integración por partes, 202. Integración por reducción, 203. Integración de funciones racionales, 203. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 209.

4.11 Area integral definida. Aplicaciones 213

Introducción, 213. Medida de áreas de regiones poligonales, 213. El problema general del área, 215. Definición de área, 216. Integral definida, 217. Integración de Riemann de una función continua, positiva y monótona, 219. Integración de una función monótona, continua y negativa, 222. Integración de una función continua. Teorema de Barrow, 225. Funciones definidas por integrales, 226. Integración de Riemann de funciones no continuas, 227. Elementos diferenciales de longitudes, áreas y volúmenes, 228. Aplicaciones, 232. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 236.

5. ALGEBRA LINEAL

5.1 Espacios vectoriales 243

Introducción, 243. Vectores en el plano, 243. Vectores libres, 246. Adición de vectores libres, 250. Multiplicación de un número real por un vector libre, 252. Dependencia e independencia lineal, 254. Base y dimensión, 256. Coordenadas. Cambio de coordenadas, 257. Generalización al espacio, 258. Definición de espacio vectorial, 258. Dimensión de un espacio vectorial, 260. Subespacios vectoriales de un espacio vectorial, 262. Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, 263. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 264.

5.2 Matrices. Determinantes 269

Matrices. Definición, 269. Operaciones con matrices del mismo orden, 270. Anillo de las matrices cuadradas $M_{n\times n}$, 275. Inversiones de una permutación, 275. Determinante. Definición, 276. Determinantes de segundo y tercer orden. Regla de Sarrus, 277. Propiedades de los determinantes, 278. Adjunto y menor complementario de un elemento, 280. Matriz inversa de una matriz cuadrada, 282. Menores de una matriz. Menor orlado, 284. Combinaciones lineales de filas y columnas. Rango de una matriz, 285. Proposiciones relativas a dependencia lineal de filas y columnas, 286. Teorema del rango, 287. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 288.

5.3 Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché 293

Sistemas de ecuaciones lineales. Definiciones, 293. Sistemas de n ecuaciones con n incógnitas, 294. Resolución en el caso general de un sistema de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché-Fröbenius, 296. Sistemas homogéneos, 298. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 299.

5.4 Multiplicación escalar. Multiplicación vectorial. Funciones vectoriales 305

Introducción, 305. Multiplicación escalar de vectores, 305. Propiedades de la multiplicación escalar, 307. Expresión analítica del producto escalar, 308. Bases ortogonales y ortonormales, 311. Generalización a dimensión tres, 311. Multiplicación escalar en un espacio vectorial cualquiera, 313. Espacio vectorial euclídeo, 314. Multiplicación vectorial en V_3, 314. Propiedades de la multiplicación vectorial, 315. Expresión analítica del producto vectorial, 317. Triple producto escalar. Interpretación geométrica. Expresión analítica, 318. Función vectorial, 319. Derivada de una función vectorial, 320. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 322.

6. GEOMETRIA

6.1 El plano afín de la recta. Incidencia, intersección y paralelismo 327

Introducción, 327. Plano afín, 328. Biyección entre los puntos de Π_o y los vectores libres, 329. Referencia de coordenadas en el plano afín, 330. Recta del plano afín, 331. Posiciones relativas de puntos y rectas, 334. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 336.

6.2 Plano euclídeo. Problemas métricos 341

Plano euclídeo, 341. Coordenadas contravariantes y covariantes, 342. Diversas expresiones analíticas del producto escalar, 344. Interpretación de los coeficientes de la ecuación de la recta, 345. Desigualdad de Cauchy-Schwarz,

346. Espacio métrico, 347. Estructura métrica ligada al plano euclídeo, 348. Problemas métricos en el plano, 354. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 354.

6.3 Espacio afín y euclídeo 359

Espacio afín, 359. Biyección entre los puntos de E_0 y los vectores libres de V_3. Referencia de coordenadas, 360. Recta en el espacio afín, 361. Plano en el espacio afín, 362. Posiciones relativas de dos y tres planos, 364. Haz de planos, 366. Rectas paralelas, 367. Paralelismo de recta y plano, 368. Dependencia lineal en espacios afines. Variedades lineales, 369. Espacio euclídeo. Estructura métrica, 372. Regularidad de la matriz fundamental U, 372. Coordenadas contravariantes y covariantes, 375. Expresiones diversas del producto escalar, 376. Perpendicularidad, 376. Angulos, 378. Distancias, 380. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 382.

6.4 Espacio proyectivo 387

Introducción, 387. Recta proyectiva. Referencia elemental de coordenadas proyectivas, 387. Referencia general de coordenadas proyectivas, 390. Razones simple y doble de puntos alineados, 391. Interpretación geométrica de las coordenadas afines y proyectivas, 392. Plano proyectivo, 394. Interpretación geométrica de las coordenadas afines y proyectivas, 396. Generalización a dimensión ≥ 3, 397. Dependencia e independencia lineal, 398. Aplicación de los anteriores conceptos a casos concretos, 399. Variedades lineales proyectivas, 400. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 401.

6.5 Geometrías de los espacios afín y euclídeo. Proyectividades 405

Introducción, 405. Afinidades, 406. Semejanzas, 408. Congruencias, 411. Proyectividades, 413. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 414.

6.6 Estudio de algunas curvas planas. Concepto de curva. Curvaturas 417

Introducción. Referencia polar, 417. Ecuación de la recta en coordenadas polares, 418. Ecuación cartesiana y polar de la circunferencia, 420. Elipse, hipérbola y parábola, 422. Ecuación de las cónicas en coordenadas polares, 425. Secciones de un cono de revolución, 426. Curvas polinómicas, 427. Curvas exponencial y logarítmica, 430. Curvas correspondientes a las funciones hiperbólicas, 432. Curvas trigonométricas, 436. Curvas. Definición, 438. Curvas y gráficas de funciones, 443. Concepto de curvatura. Centro y radio, 446. Cálculo de la curvatura. Coordenadas del centro, 449. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 451.

6.7 Idea elemental de superficies. Curvas alabeadas 455

Introducción. Referencia de coordenadas cilíndricas y esféricas, 455. Superficie. Concepto. Formalización, 458. Función real de dos variables reales, 462. Distintas formas de expresar la ecuación de una superficie, 465. Superficies elementales, 466. Curvas alabeadas. Concepto. Formalización, 473. Distintas formas de expresar las ecuaciones de una curva, 474. Estudio de algunas curvas: cúbicas, hélices, 475. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 477.

4

ANALISIS BASICO

BIBLIOGRAFIA 4

R. DEDEKIND: *Essays on the theory of numbers.* Dover Publications, Inc. Nueva York.

M. SPIVAK: *Calculus*, dos tomos. Ed. Reverté. Barcelona, 1970.

T. M. APÓSTOL: *Calculus*, dos vols., 2.ª ed. Ed. Reverté. Barcelona, 1973.

M. ZAMANSKY: *Introducción al álgebra y análisis moderno.* Ed. Montaner y Simón, 1967.

T. M. APÓSTOL: *Análisis matemático.* Ed. Reverté. Barcelona, 1972.

P. PUIG ADAM: *Cálculo integral*, dos tomos, 12.ª ed. Biblioteca Matemática. Madrid, 1970.

J. REY PASTOR: *Elementos de la teoría de funciones*, 6.ª ed., Biblioteca Matemática. Madrid, 1973.

H. LEBESGUE: *Measure and the integral.* Ed. Holden-day, Inc. Londres.

4.1

El número real

4.101. Introducción

4.102. Sucesiones de números racionales

4.103. Operaciones con sucesiones

4.104. Valor absoluto de un número racional

4.105. Entorno de un número racional

4.106. Límite de una sucesión de números racionales

4.107. Propiedades de las sucesiones nulas

4.108. Sucesiones de Cauchy de números racionales

4.109. Operaciones con sucesiones de Cauchy

4.110. Representación en diagramas de Venn de los distintos tipos de sucesiones

4.111. Definición de número real

4.112. Operaciones con números reales

4.1121. *Adición*
4.1122. *Multiplicación*

4.113. Elementos simétricos en $\mathfrak{R}$. El cuerpo de los números reales

4.114. El cuerpo de los números racionales como subcuerpo de los números reales

4.115. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

Este libro está estructurado para su utilización a dos niveles de estudio.

Los signos *y* *se disponen en los márgenes, indicando el principio y el final de las partes del texto que pueden abordarse en segunda lectura.*

4.1

El número real

4.101. Introducción

Este capítulo y los dos siguientes constituyen lo que se podría llamar el preanálisis matemático. Tratan, respectivamente, de las estructuras algebraica, de orden y topológica de los números reales.

Podemos decir que se puede hacer muy poco o nada sin los números reales. El Análisis matemático (parte de las Matemáticas que estudia todo lo relacionado con el concepto FUNCION), descansa sobre el número real, y esta disciplina es de una importancia enorme para las ciencias experimentales. El concepto más difícil de toda la Aritmética (o ciencia de los números) es el número real.

Al comenzar con el estudio del número natural se pasa de una manera sencilla, como una generalización, al número entero y después, al número racional. El paso del número racional al número real, concepto más amplio que comprende al anterior, representa un grado de abstracción enorme.

El número racional tiene una apoyatura en el mundo físico; el número real *sólo* es manejable mediante la «aproximación», con un número racional. Por ejemplo, si deseamos pesar en una balanza de precisión $\sqrt{2}$ gramos, es evidente que hemos de pesar 1,4 o bien 1,41, 1,414, según el grado de aproximación deseado. $\sqrt{2}$ no es ninguno de los tres números racionales anteriores; lo que ocurre es que lo sustituimos por ellos para poder trabajar.

De una manera «intuitiva», y antes de formalizar el concepto de número real, podemos decir que el número real $\sqrt{2}$ es la «sucesión de infinitos números racionales», que obtendríamos al buscar grados de aproximación cada vez mayores.

Los números reales aportan a los números racionales la «continuidad» de la

cual carecen. Gracias a la creación de estos números ha sido posible establecer mediciones de magnitudes físicas continuas (temperaturas, velocidades, etc.).

Naturalmente, se puede hacer uso de los números reales sin llegar al conocimiento de una definición rigurosa de los mismos, pero esto ni produce satisfacción, ni es conveniente, pues el estudio preciso del tema es muy formativo.

Al llegar a este punto se suponen conocidos los conceptos de cardinales, números naturales, números enteros y números racionales.

NOTA. El método que vamos a seguir para la definición de número real es el método general de obtención de un espacio de Banach a partir de un espacio vectorial normado no completo.

Los espacios de Banach, y en particular los espacios de Hilbert, han invadido toda la literatura sobre análisis funcional moderno, y por tanto, creemos que este método es el más útil, habida cuenta de que no es más difícil que los métodos tradicionales.

El número real será *una clase de sucesiones de Cauchy de números racionales* respecto de una determinada relación de equivalencia. Los números racionales y los enteros también eran clases de equivalencia, pero los elementos de estas clases eran pares de números, mientras que los elementos de las clases que definen los números reales son sucesiones (infinitos elementos) de números racionales de un tipo determinado.

Aquéllos (enteros y racionales) tienen una representación canónica; éstos también la pueden tener como expresión decimal indefinida.

4.102. Sucesiones de números racionales

Se llama sucesión de números racionales a una aplicación del conjunto $N - \{0\}$ en Q; donde N es el conjunto de números naturales y Q el conjunto de números racionales. Si representamos la aplicación por la letra «a», tendremos:

$$\begin{array}{l} N - \{0\} \xrightarrow{a} Q \\ \quad 1 \longrightarrow a(1) \\ \quad 2 \longrightarrow a(2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad n \longrightarrow a(n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$a(1)$ se llama primer término de la sucesión; $a(2)$ segundo término, . . ., $a(n)$ término enésimo de la sucesión.

Normalmente ocurre que $a(n)$ es expresable por medio de una relación algebraica, por ejemplo

$$a(n) = \frac{n-1}{n^3} \quad \text{o bien} \quad a(n) = \frac{1}{n}, \text{ etc.}$$

Si se conoce una tal relación, está definida la sucesión dando valores a n; por ejemplo, si $a(n) = \dfrac{2-n}{n^2}$ resultará $a(1) = \dfrac{1}{1}$, $a(2) = \dfrac{0}{4}$, $a(3) = \dfrac{-1}{9}$, . . .

No obstante, hay ocasiones en que no es expresable el término enésimo por

ninguna relación. Por ejemplo, la sucesión 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . , cuyos primeros términos son 0, 1 y los demás se obtienen sumando los dos anteriores. (Esta sucesión se conoce con el nombre de sucesión de Fibonacci.)

En el estudio de las sucesiones es costumbre escribir a_n en vez de $a(n)$. Esta es la notación que seguiremos de ahora en adelante.

Una sucesión se representa $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, o bien (a_n).

Un caso particular de sucesión es aquel en que todos los términos son iguales, $k, k, \ldots, k, \ldots$, en cuyo caso se llama sucesión *constante*.

4.103. Operaciones con sucesiones

Sean las sucesiones

$$(a_n) = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$(b_n) = b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

A partir de ellas podemos obtener las siguientes sucesiones:

$$(a_n + b_n) = a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots$$
$$(a_n b_n) = a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots$$

La primera se llama sucesión suma de las sucesiones (a_n) y (b_n), o sea, se define *la operación adición*:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

La segunda se llama sucesión producto de las sucesiones (a_n) y (b_n), es decir, se define *la operación multiplicación*:

$$(a_n)(b_n) = (a_n b_n).$$

a) *Propiedades de la adición*

1. Asociativa: $(a_n) + [(b_n) + (c_n)] = [(a_n) + (b_n)] + (c_n)$ ·

   $a_n + (b_n + c_n) =$ término enésimo de $((a_n) + [(b_n) + (c_n)])$
   $(a_n + b_n) + c_n =$ término enésimo de $([(a_n) + (b_n)] + (c_n))$

   y como $a_n + (b_n + c_n) = (a_n + b_n) + c_n$ por la propiedad asociativa de los números racionales, hemos terminado la demostración, puesto que dos sucesiones son iguales si los términos enésimos lo son.

2. Conmutativa: $(a_n) + (b_n) = (b_n) + (a_n)$.
   Es consecuencia de que los términos enésimos son iguales, pues $a_n + b_n = b_n + a_n$ por la propiedad conmutativa de los números racionales.

3. Elemento 0: $(a_n) + (0) = (a_n)$.
   Representamos por (0) a la sucesión cuyos términos son todos iguales a 0, es decir $(0) = 0, 0, \ldots, 0, \ldots$

El enunciado nos dice que la sucesión (0), que llamamos ***sucesión cero***, sumada a cualquier otra no la altera.
Es evidente puesto que los términos enésimos son iguales: $a_n + 0 = a_n$.

4. Elemento opuesto: $(a_n) + (-a_n) = (0)$.
Llamaremos sucesión opuesta de una sucesión (a_n) a la sucesión $(-a_n)$

$$(a_n) + (-a_n) = (a_n - a_n) = (0), \qquad \text{c.q.d.}$$

Estas cuatro propiedades nos indican que el conjunto de sucesiones de números racionales es un *grupo abeliano* respecto de la operación adición.

b) *Propiedades de la multiplicación*

1. Asociativa: $(a_n)[(b_n)(c_n)] = [(a_n)(b_n)](c_n)$.
Es consecuencia de que $a_n(b_nc_n) = (a_nb_n)c_n$ por la propiedad asociativa de los números racionales.

2. Conmutativa: $(a_n)(b_n) = (b_n)(a_n)$.
$a_nb_n = b_na_n$ por la propiedad conmutativa de los números racionales.

3. Elemento unidad: $(a_n)(1) = (a_n)$.
$(1) = 1, 1, \ldots, 1, \ldots$, sucesión que tiene todos sus términos iguales a 1, y que llamaremos *sucesión unitaria*.
El enunciado es evidente.

De estas propiedades resulta que el conjunto de sucesiones de números racionales es un *semigrupo conmutativo con elemento unidad.*

c) *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición*

$$(a_n)[(b_n) + (c_n)] = (a_n)(b_n) + (a_n)(c_n)$$

Es consecuencia de que $a_n(b_n + c_n) = a_nb_n + a_nc_n$ por la propiedad distributiva de los números racionales.

De los apartados *a*), *b*) y *c*) resulta que el conjunto de sucesiones de números racionales tiene estructura de *anillo con elemento unidad.*

4.104. Valor absoluto de un número racional

Dado el conjunto Q de números racionales, definimos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & Q_+ \\ x & \longrightarrow & |x| = \text{máx}\,\{x, -x\} \end{array}$$

en el conjunto Q_+ de números racionales positivos (incluido el 0).

Valor absoluto de x

(Obsérvese que esta definición ha sido posible porque Q es un conjunto ordenado, pues en caso contrario no se podría hablar de máximo entre x y $-x$.) Las propiedades que se demuestran a continuación son consecuencia de ser cuerpo ordenado.

Vamos a demostrar las propiedades más importantes del valor absoluto:

1.ª $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Evidentemente, pues si $x = 0$ resulta que $0 = \text{máx}\{0, -0\} = 0$ y si $|x| = 0$ ha de ser $x = 0$ ya que si $x \neq 0$ resultará que x o $-x$ será positivo, y el máximo entre dos números, de los cuales uno es positivo y otro negativo, es el positivo; luego $|x| \neq 0$ es contradicción.

2.ª $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$|x| = \text{máx}\{x, -x\} \Rightarrow \begin{cases} x \leq |x| & [1] \\ -x \leq |x| & [2] \end{cases}$$

$$|y| = \text{máx}\{y, -y\} \Rightarrow \begin{cases} y \leq |y| & [3] \\ -y \leq |y| & [4] \end{cases}$$

Sumando (1) + (3) $\Rightarrow x + y \leq |x| + |y|$
(2) + (4) $\Rightarrow -(x + y) \leq |x| + |y|$
luego máx $(x + y, -(x + y)) \leq |x| + |y|$
o sea: $|x + y| \leq |x| + |y|$, c.q.d.

3.ª $|xy| = |x||y|$

Para la demostración de esta propiedad consideraremos cuatro casos posibles. En todos ellos hay que tener en cuenta que el valor absoluto de un número positivo coincide con el número, y el de un número negativo con el opuesto.

a) $x > 0 \quad y > 0 \Rightarrow xy > 0$

$$|x| = x \quad |y| = y \quad |xy| = xy = |x||y|$$

b) $x > 0 \quad y < 0 \Rightarrow xy < 0$

$$|x| = x \quad |y| = -y \quad |xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$$

c) $x < 0 \quad y > 0 \Rightarrow xy < 0$

$$|x| = -x \quad |y| = y \quad |xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$$

d) $x < 0 \quad y < 0 \Rightarrow xy > 0$

$$|x| = -x \quad |y| = -y \quad |xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$$

4.105. Entorno de un número racional

Dados dos números racionales a y ε, siendo $\varepsilon > 0$, se llama entorno de centro a y radio ε al conjunto de números racionales x, que verifican $|x - a| < \varepsilon$. Se acostumbra a representar por $E_\varepsilon(a)$.

En notación simbólica, se tiene:

$$E_\varepsilon(a) = \{x \in Q / |x - a| < \varepsilon\}$$

Si representamos en una recta los números racionales, $E_\varepsilon(a)$ es el conjunto de números racionales que están dentro del segmento de extremos $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$

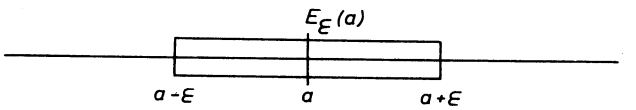


Fig. 4.1

NOTA. La definición de entorno que hemos dado es la más simple. Se suele dar en el estudio de la topología una definición menos restrictiva. Para nuestros propósitos es suficiente con la que acabamos de dar.

4.106. Límite de una sucesión de números racionales

Se dice que un número racional a es el límite de una sucesión (a_n), y se le representa $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_1, tal que $|a - a_n| < \varepsilon$, siempre que $n > n_1$.

Gráficamente, esta definición quiere decir que todos los términos de subíndice mayor que n_1 están contenidos en el entorno de centro a y radio ε

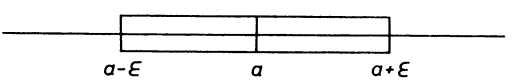


Fig. 4.2

También puede definirse de la siguiente manera:

Se dice que a es el límite de la sucesión (a_n) cuando en cualquier entorno de centro a están contenidos todos los términos de la sucesión, excepto, a lo sumo, un número finito.

Ejemplo

Sea la sucesión de término general $a_n = \frac{1}{n}$.

Vamos a demostrar, basándonos en la definición de límite, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Fijemos un valor $\varepsilon > 0$ tan pequeño como queramos.

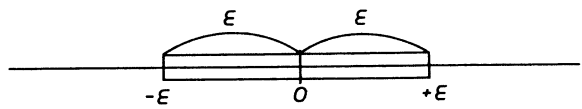


Fig. 4.3

Se ha de demostrar que, dentro del entorno de centro 0 y radio ε, están contenidos todos los términos de la sucesión a partir de uno dado, o sea que

$$|0 - \frac{1}{n}| = |-\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > n_1.$$

Si se despeja n en $\frac{1}{n} < \varepsilon$ resultará $n > \frac{1}{\varepsilon}$; luego vale $n_1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

(NOTA. [ ] representa «parte entera».)

Si hacemos por ejemplo $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$ resultará $n_1 = \left[\frac{1}{\frac{1}{10^6}}\right] = 10^6$, luego todos los términos de subíndice mayor que 10^6 están dentro del entorno, o sea: $a_{10^6+1}, a_{10^6+2}, \ldots$, y quedan fuera solamente 10^6 términos que, aunque son muchos, no son «nada» comparados con los infinitos que quedan dentro.

Toda sucesión que tiene límite se llamará *sucesión convergente*. En el caso particular de que el límite sea cero se llamará *sucesión nula*.

Ejercicio-Ejemplo

Demuéstrese que el límite de una sucesión constante es la misma constante.

4.107. Propiedades de las sucesiones nulas

Vamos a establecer tres propiedades de las sucesiones nulas, que se utilizarán más adelante.

a) La sucesión cero es una sucesión nula. Esto es consecuencia de que el límite de una sucesión constante es la misma constante.

$$(0) = 0, 0, \ldots, 0, \ldots \qquad \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

b) La sucesión opuesta de una sucesión nula es también una sucesión nula.
En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \qquad \exists n_1 / |a_p| < \varepsilon \qquad \text{para } p > n_1$$

Como dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto resulta que $|-a_p| = |a_p| < \varepsilon$, siempre que $p > n_1$, luego $\lim_{n\to\infty} (-a_n) = 0$, c.q.d.

c) La suma de dos sucesiones nulas es una sucesión nula.
Se sabe que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Se trata de demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$$

Pero

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n' / |a_p + b_p| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad p > n'$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_1 / |a_p| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para} \qquad p > n_1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_2 / |b_p| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para} \qquad p > n_2$$

resultará si

$$n' = \text{máx}\,\{n_1, n_2\} \text{ que } |a_p + b_p| \leq |a_p| + |b_p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \text{c.q.d.}$$

4.108. Sucesiones de Cauchy de números racionales

Las sucesiones que se van a definir son de una importancia muy grande. Algunos autores las llaman *sucesiones fundamentales*.

Una sucesión de números racionales se llama *sucesión de Cauchy*, si fijado un número racional $\varepsilon > 0$ tan pequeño como queramos, es posible encontrar un término de la sucesión, por ejemplo, el a_{n_1} tal que la diferencia entre dos términos cualesquiera *que tengan subíndice mayor que* n_1 sea en valor absoluto menor que ε.

O sea que $|a_p - a_q| < \varepsilon$ siempre que $p > n_1$, $q > n_1$.

En lenguaje simbólico, la definición puede escribirse:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) = n_1 / p > n_1 \wedge q > n_1 \Rightarrow |a_p - a_q| < \varepsilon$$

Ejemplo 1

Estudiar si la sucesión de término general $a_n = \frac{1}{n}$ es sucesión de Cauchy, haciendo uso de la definición.

Hay que demostrar que dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ un $n(\varepsilon)$ tal que $p > n(\varepsilon) \wedge q > n(\varepsilon) \Rightarrow$ $\Rightarrow |a_p - a_q| < \varepsilon$

$$a_p = \frac{1}{p},\ a_q = \frac{1}{q},\ \text{supongamos } p > q \Rightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{q} \Rightarrow a_q - a_p = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} < \frac{1}{q}$$

Si se hace $\frac{1}{q} < \varepsilon$, resultará $q > \frac{1}{\varepsilon}$; luego $p > q > \frac{1}{\varepsilon}$ implica $a_q - a_p < \varepsilon$, por tanto, podemos tomar como $n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Ejemplo 2

Demostrar que la sucesión de término general $a_n = n^2$ no es una sucesión de Cauchy.

$$a_p = p^2,\ a_q = q^2,\ p > q \Rightarrow p^2 > q^2 \text{ (por ser } p \text{ y } q \text{ positivos)}$$

$a_p - a_q = p^2 - q^2 = (p + q)(p - q) \geq p + q > 2$; luego no es sucesión de Cauchy, pues la diferencia entre dos términos siempre será mayor que 2.

Ejemplo 3

Demostrar que la sucesión de números racionales cuyo término general es $a_n = b, b_1, b_2, \ldots, b_n$ es de Cauchy.

(Se advierte que b es la parte entera y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ las sucesivas cifras decimales de la expresión decimal de a_n.)

Se puede considerar la sucesión

$$a_1 = 27{,}1;\ a_2 = 27{,}13;\ a_3 = 27{,}135;\ \ldots$$

en cuyo caso sería

$$b = 27,\ b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 5,\ \ldots$$

Sean dos términos arbitrarios a_p, a_q y vamos a ver que su diferencia puede hacerse en valor absoluto menor que cualquier $\varepsilon > 0$, siempre que p y q sean mayores que un determinado número $n(\varepsilon)$ que hemos de hallar.

Sea $p > q$ (pues entre p y q uno de ellos será el mayor)

$$\begin{array}{l} a_p = b,\ b_1 b_2\ \ldots,\ b_q\ b_{q+1}\ \ldots\ b_p \\ a_q = b,\ b_1 b_2\ \ldots,\ b_q\ 0\ \ldots\ 0 \end{array}$$

$$a_p - a_q = 0,\ 0\,0\ \ldots\ 0 b_{q+1}\ \ldots\ b_p = \frac{b_{q+1}\ \ldots\ b_p}{10^p} < \frac{10^{p-q}}{10^p} = \frac{1}{10^q}$$

luego si hacemos

$$\frac{1}{10^q} < \varepsilon \Rightarrow 10^q > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow q > \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Resulta entonces que

$$a_p - a_q < \varepsilon$$

siempre que

$$p > q > \log \frac{1}{\varepsilon},$$

y basta tomar

$$n(\varepsilon) = \left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]$$

Ejemplo 4

Estudiar si es sucesión de Cauchy la sucesión

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Fijado ε, hemos de encontrar un $n(\varepsilon)$, tal que $|a_p - a_q| < \varepsilon$ para $p > n(\varepsilon)$ y $q > n(\varepsilon)$.

En el caso de que p y q sean de distinta paridad, es decir uno par y otro impar, resulta

$$|a_p - a_q| = |2 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}| > 2,$$

luego no es sucesión de Cauchy pues fijado $\varepsilon = 1$, por ejemplo, si p y q son de distinta paridad *siempre* será $|a_p - a_q| > \varepsilon$.

Gráficamente, tal vez se vea mejor:

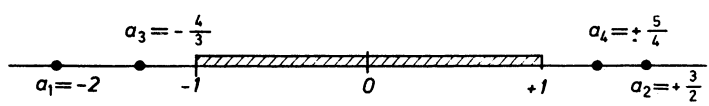


Fig. 4.4

Los términos de subíndice par se acercan al 1, y los de subíndice impar al -1, de forma que siempre quedan exteriores al segmento $[-1, 1]$; por tanto, el valor absoluto de la diferencia de dos términos siempre será mayor que 2, si son de distinta paridad.

Proposición. Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

Demostración

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, se ha de demostrar que para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un $n_1 = n(\varepsilon)$, tal que $|a_p - a_q| < \varepsilon$, siempre que $p > n_1$ y $q > n_1$.

Por definición de límite sabemos que, fijado $\frac{\varepsilon}{2}$, existe un n_1 tal que

$$|a_p - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } p > n_1$$

$$|a_q - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } q > n_1;$$

luego:

$$|a_p - a_q| = |(a_p - a) + (a - a_q)| \leq |a_p - a| + |a - a_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

siempre que

$$p, q > n_1, \qquad \text{c.q.d.}$$

4.109. Operaciones con sucesiones de Cauchy

Representaremos por la letra griega ξ (xi), al conjunto de sucesiones de Cauchy, o sea $\xi = \{\text{sucesiones de Cauchy}\}$.

Proposición 1. *Toda sucesión de Cauchy tiene todos sus términos acotados.*

Demostración

Sea $(a_n) \in \xi$; hay que demostrar que existe un número fijo K, tal que $|a_n| < K$, para cualquier valor de n.

Fijado $\varepsilon > 0$ $\exists n'/|a_p - a_q| < \varepsilon$ para $p,q > n'$; luego también $|a_p - a_{n'+1}| < \varepsilon$ para $p > n'$, pues $n' + 1 > n'$.

$$|a_p| = |a_p - a_{n'+1} + a_{n'+1}| \leq |a_p - a_{n'+1}| + |a_{n'+1}| < \varepsilon + |a_{n'+1}|$$

Si llamamos

$$K = \text{máx}\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n'}|, \varepsilon + |a_{n'+1}|\},$$

se cumple

$$|a_n| < K, \quad \text{para cualquier } n, \qquad \text{c.q.d.}$$

Proposición 2. *La suma de dos sucesiones de Cauchy es otra sucesión de Cauchy.*

$$(a_n),\ (b_n) \in \xi \Rightarrow (a_n + b_n) \in \xi$$

Demostración

Puesto que

$$a_n \in \xi \Rightarrow |a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } p,q > n_1$$

$$b_n \in \xi \Rightarrow |b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } p,q > n_2$$

Entonces, si $p,q > n' = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, se verificará:

$$|(a_p+b_p)-(a_q+b_q)|=|a_p-a_q+b_p-b_q|\leq|a_p-a_q|+|b_p-b_q|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

luego

$$(a_n + b_n) \in \xi, \qquad \text{c.q.d.}$$

Proposición 3. *El producto de dos sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy.*

$$(a_n),\ (b_n) \in \xi \Rightarrow (a_n b_n) \in \xi$$

Demostración

Por la proposición 1, $|a_n| < K_1$, para cualquier valor de n, y análogamente, $|b_n| < K_2$.

Hemos de demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n' tal que se verifica $|a_p b_p - a_q b_q| < \varepsilon$ para $p,q > n'$. Resulta:

$$|a_p b_p - a_q b_q| = |a_p b_p - \underbrace{a_p b_q + a_p b_q}_{0} - a_q b_q| =$$

$$= |a_p(b_p - b_q) + b_q(a_p - a_q)| \leq |a_p||b_p - b_q| + |b_q||a_p - a_q| <$$

$$< K_1|b_p - b_q| + K_2|a_p - a_q|$$

Ahora bien:

$$(a_n) \in \xi \Rightarrow |a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2K_2} \quad \text{para } p,q > n_2$$

$$(b_n) \in \xi \Rightarrow |b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2K_1} \quad \text{para } p,q > n_1;$$

luego, si $n' = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ sucede que

$$|a_p b_p - a_q b_q| < K_1|b_p - b_q| + K_2|a_p - a_q| < K_1\frac{\varepsilon}{2K_1} + K_2\frac{\varepsilon}{2K_2} = \varepsilon \quad \text{para } p,q > n',$$

lo que termina la demostración.

4.110. Representación en diagramas de Venn de los distintos tipos de sucesiones

Sea S = {sucesiones de números racionales}
ξ = {sucesiones de Cauchy}
C = {sucesiones convergentes}
I_0 = {sucesiones nulas}

$I_0 \subset C \subset \xi \subset S$.

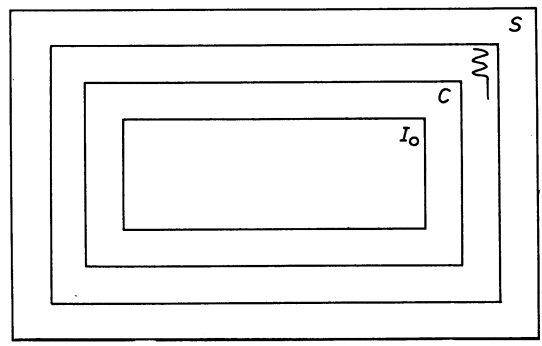


Fig. 4.5

4.111. Definición de número real

En el conjunto ξ de las sucesiones de Cauchy de números racionales se establece una *relación de equivalencia* R.

$$(a_n),\ (b_n) \in \xi \quad (a_n)\ R\ (b_n) \Leftrightarrow (a_n - b_n) \in I_0$$

Veamos si se cumplen las tres propiedades de una relación de equivalencia.

I. Reflexiva

$(a_n)\ R\ (a_n) \Leftrightarrow (a_n - a_n) = (0) \in I_0$, por la primera propiedad de las sucesiones nulas.

II. Simétrica

$$[(a_n)\ R\ (b_n) \Rightarrow (b_n)\ R\ (a_n)] \Leftrightarrow [(a_n - b_n) \in I_0 \Rightarrow (b_n - a_n) \in I_0],$$

evidente por la segunda propiedad de las sucesiones nulas.

III. Transitiva

$$[(a_n)\,R\,(b_n) \wedge (b_n)\,R\,(c_n) \Rightarrow (a_n)\,R\,(c_n)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(a_n - b_n) \in I_0 \wedge (b_n - c_n) \in I_0 \Rightarrow (a_n - c_n) \in I_0]$$

evidente, pues,

$$(a_n - c_n) = (a_n - b_n) + (b_n - c_n)$$

y basta aplicar la tercera propiedad de las sucesiones nulas.

Se sabe que toda relación de equivalencia determina una clasificación.

Se definen *los números reales* como las clases de sucesiones de Cauchy respecto de la relación de equivalencia R.

Al conjunto de los números reales se le representa por la letra $\mathfrak{R}$. Según la definición que acabamos de dar, $\mathfrak{R} = \xi/R$; es decir, $\mathfrak{R}$ es el conjunto cociente de ξ, respecto de la relación R.

Nótese que los elementos de $\mathfrak{R}$ no son sucesiones de Cauchy, sino clases de sucesiones de Cauchy.

En toda relación de equivalencia, una clase cualquiera está representada por un elemento arbitrario de la misma. En nuestro caso un número real está representado por una sucesión de Cauchy cualquiera de la clase.

Si α es un número real, o sea si $\alpha \in \mathfrak{R}$ será $\alpha = \{(a_n), (a'_n), \ldots\}$; dos elementos cualesquiera de α, o sea dos sucesiones de Cauchy, son tales que su diferencia es una sucesión nula.

α está definido por un elemento cualquiera de la clase. Se puede representar así:

$$\alpha = \{(a_n)\} = \{(a'_n)\} = \ldots$$

indicando que α es la clase representada por (a_n), (a'_n), etc.

Ejercicio

Estudiar si los números reales

$$\alpha = \left\{\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right\} \quad \text{y} \quad \beta = \left\{\left(\frac{n - 2n^2}{2n^2}\right)\right\}$$

son iguales.

4.112. Operaciones con números reales

4.1121. *Adición*

Sean

$$\alpha = \{(a_n)\} = \{(a'_n)\} = \ldots$$
$$\beta = \{(b_n)\} = \{(b'_n)\} = \ldots$$

Se define

$$\alpha + \beta = \{(a_n + b_n)\}$$

$\alpha + \beta$ es un número real puesto que $(a_n + b_n)$ es una sucesión de Cauchy, ya que es la suma de dos sucesiones de Cauchy (proposición 2, apartado 9).

Para que esta operación tenga sentido, hemos de comprobar que se verifica la propiedad uniforme, o sea que si tomamos otros representantes $(a'_n) \in \alpha$, $(b'_n) \in \beta$ se obtiene el mismo resultado, es decir:

$$\{(a_n + b_n)\} = \{(a'_n + b'_n)\}$$

que equivale a

$$(a_n + b_n) - (a'_n + a'_n) \in I_0,$$

o lo que es igual:

$$(a_n - a'_n) + (b_n - b'_n) \in I_0.$$

Como

$$(a_n), (a'_n) \in \alpha \Rightarrow (a_n - a'_n) \in I_0$$
$$(b_n), (b'_n) \in \beta \Rightarrow (b_n - b'_n) \in I_0$$

Ahora basta aplicar la propiedad que dice que «la suma de dos sucesiones nulas es una sucesión nula», para obtener

$$(a_n - a'_n) + (b_n - b'_n) \in I_0, \qquad \text{c.q.d.}$$

Consecuencia de las propiedades de la adición de sucesiones es que la adición de números reales tiene las propiedades

— Conmutativa.
— Asociativa.
— Elemento cero.
— Elemento opuesto.

NOTA. El elemento 0, o sea la sucesión (0) = 0, 0, . . . , 0, . . . es sucesión constante y por tanto convergente (nula, más exactamente), luego también de Cauchy (proposición del apartado 8). Cero = = {(0)} = {sucesiones nulas}.

Si una sucesión es de Cauchy, su opuesta también lo es, puesto que si $|a_p - a_q| < \varepsilon$, se verificará

$$|(-a_p) - (-a_q)| = |a_p - a_q| < \varepsilon;$$

luego el opuesto de $\{(a_n)\} =$

$$-\{(a_n)\} = \{(-a_n)\}$$

4.1122. *Multiplicación*

Definimos

$$\alpha\beta = \{(a_n b_n)\}.$$

Es un número real puesto que $(a_n b_n)$ es una sucesión de Càuchy como producto de dos que lo son (proposición 3, apartado 9).

Para que esta operación tenga sentido hemos de comprobar la uniformidad, o sea:

$$\{(a_n b_n)\} = \{(a'_n b'_n)\} \Leftrightarrow (a_n b_n - a'_n b'_n) \in I_0$$

Para la demostración necesitamos hacer uso del siguiente

Lema. El producto de una sucesión acotada por una sucesión nula es una sucesión nula; es decir

$$|a_n| < K \wedge (b_n) \in I_0 \Rightarrow (a_n b_n) \in I_0$$

$$(a_n b_n) \in I_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n'/|a_p b_p| < \varepsilon \quad \text{para} \quad p > n'$$

pero

$$|a_p b_p| = |a_p||b_p| < K|b_p| \quad \text{y} \quad |b_p| < \frac{\varepsilon}{K} \quad \text{para} \quad p > n'$$

pues $(b_n) \in I_0$, luego

$$|a_p b_p| < K|b_p| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \quad \text{para} \quad p > n', \quad \text{c.q.d.}$$

Haciendo uso de este lema se demuestra que $(a_n b_n - a'_n b'_n) \in I_0$, pues

$$a_n b_n - a'_n b'_n = a_n b_n - \underbrace{a_n b'_n + a_n b'_n}_{\parallel\ 0} - a'_n b'_n = a_n(b_n - b'_n) + b'_n(a_n - a'_n);$$

pero

$(a_n(b_n - b'_n)) \in I_0$ por el lema, pues (a_n) acotada y $(b_n - b'_n) \in I_0$
$(b'_n(a_n - a'_n)) \in I_0$ por el lema, pues (b'_n) acotada y $(a_n - a'_n) \in I_0$

((a_n) y (b'_n) son acotadas por ser sucesiones de Cauchy, según la proposición 1 del apartado 9.)

Como la suma en dos sucesiones nulas es una sucesión nula, resultará

$$(a_n b_n - a'_n b'_n) \in I_0, \quad \text{c.q.d.}$$

Consecuencia de las propiedades de la multiplicación de sucesiones es que la multiplicación de números reales tiene las propiedades:

— Conmutativa.

— Asociativa.
— Elemento unidad. (Es claro que la sucesión unitaria (1) = 1, 1, . . . , 1, . . . , por ser constante, es de Cauchy.)

Además:

Distributiva de la multiplicación respecto de la adición

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R} \Rightarrow \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.
Se comprueba aplicando las definiciones anteriores, si

$$\alpha = \{(a_n)\},\ \beta = \{(b_n)\},\ \gamma = \{(c_n)\},$$

que

$$\{(a_n)\}[\{(b_n)\} + \{(c_n)\}] = \{(a_n)\}\{(b_n + c_n)\} = \{(a_n(b_n + c_n))\} =$$
$$= \{(a_nb_n + a_nc_n)\} = \{(a_nb_n)\} + \{(a_nc_n)\} = \{(a_n)\}\{(b_n)\} + \{(a_n)\}\{(c_n)\},$$

o sea

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \qquad \text{c.q.d.}$$

Las dos operaciones de adición y multiplicación que hemos visto dan a $\mathfrak{R}$ estructura de anillo unitario.

Realmente es un *cuerpo*, pero para demostrarlo nos falta ver que todo elemento distinto del número real cero tiene inverso. Esto se trata en el apartado siguiente.

4.113. Elementos simétricos en $\mathfrak{R}$. El cuerpo de los números reales

Vamos a demostrar que todo número real distinto de $\{(0)\}$ tiene elemento inverso; es decir, ha de justificarse que

$$\forall \alpha \in \mathfrak{R} - \{(0)\},\ \exists^* \alpha^{-1} / \alpha \cdot \alpha^{-1} = \{(1)\}$$

Para ello empezaremos demostrando el siguiente

Lema. Si (a_n) *es una sucesión de Cauchy, no nula, existe un entorno del origen tal que contiene como máximo un número finito de términos de la sucesión.*

Demostración

Si $(a_n) \notin I_0$ existe un entorno de 0 fuera del cual hay infinitos términos de la sucesión. Si no existiese tal entorno, es decir, si en cualquier entorno de 0 estuviesen contenidos todos los términos de (a_n) excepto a lo sumo un número finito, según la definición de límite, sería $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, contra la hipótesis.

Sea $E_k(0)$ el entorno en cuestión. Representando gráficamente (véase Fig. 4.6) resulta que fuera del segmento AB hay infinitos términos de (a_n).

Como (a_n) es sucesión de Cauchy, para el valor $k/2$ tendremos un n_1 tal que $|a_p - a_q| < k/2$ siempre que $p, q > n_1$. Puesto que hay infinitos términos de (a_n) exteriores a AB, existirán, entre éstos, términos de subíndice mayor que n_1; sea a_h un término que no sea interior al segmento AB y tal que $h > n_1$.

Se verifica $|a_h - a_n| < k/2$ siempre que $n > n_1$.

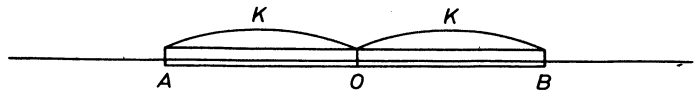


Fig. 4.6

a_h como caso límite ocupará la posición A o B; en cualquier otro caso a_h estará más distante de O que K.

Luego todo a_n, tal que $n > n_1$, quedará exterior al entorno $E_{k/2}$ (0)

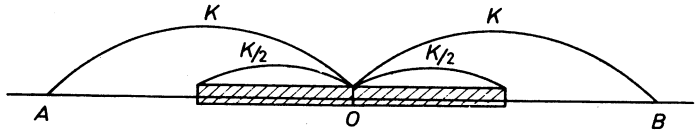


Fig. 4.7

Por lo tanto, ya hemos encontrado un entorno del origen —el $E_{k/2}$ (0)— que contiene como máximo un número finito de términos de la sucesión (a_n), c.q.d.

Corolario. Una sucesión de Cauchy que no sea nula, tiene como máximo un número finito de términos igùales a cero.

(Es consecuencia de que 0 está contenido en el entorno del lema anterior.)

Proposición. Todo número real $\{(a_n)\}$ *distinto del número real* $\{(0)\}$ *tiene inverso.*

Vamos a demostrar que el inverso de $\{(a_n)\}$ es $\left\{\left(\frac{1}{a_n}\right)\right\}$, lo cual es evidente, pues:

$$\left\{\left(a_n\right)\right\}\ \left\{\left(\frac{1}{a_n}\right)\right\} = \left\{\left(a_n \cdot \frac{1}{a_n}\right)\right\} = \left\{\left(1\right)\right\}$$

siempre que:

1.º La sucesión $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ tenga sentido, es decir, $a_n \neq 0$ para todo valor de n.

2.º La sucesión $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sea una sucesión de Cauchy.

— Veamos que se verifica la primera condición: (a_n) es sucesión de Cauchy pero no sucesión nula por hipótesis, luego tendrá un número finito de términos iguales a cero (corolario anterior) de los cuales podemos prescindir sin que cambie el carácter de sucesión de Cauchy, ni la clase de la misma.

— Comprobemos que también se verifica la segunda condición:

$\left(\frac{1}{a_n}\right)$ es sucesión de Cauchy toda vez que para todo $\varepsilon > 0\ \exists n' / |\frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q}| < \varepsilon$, siempre que $p,q > n'$, pues

$$\left|\frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q}\right| = \frac{|a_q - a_p|}{a_p a_q} < \frac{|a_q - a_p|}{K^2},$$

ya que $|a_p|\,|a_q| > K \times K = K^2$ para p,q mayores que un cierto n_2, en virtud del lema anterior.

Y a su vez, como (a_n) es sucesión de Cauchy, será $|a_p - a_q| < K^2 \cdot \varepsilon$, para valores de p y q mayores que un cierto n_1, luego para $p,q > n' = \text{máx}\,\{n_1, n_2\}$ resultará

$$\left|\frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q}\right| < \frac{|a_p - a_q|}{K^2} < \frac{K^2 \cdot \varepsilon}{K^2} = \varepsilon, \qquad \text{c.q.d.}$$

Ahora es necesario demostrar que el inverso de un número real distinto de cero está bien definido.

Si $\{(a_n)\} = \{(a'_n)\}$ y tanto (a_n) como (a'_n) son sucesiones de Cauchy sin términos iguales a cero, no tiene dificultad comprobar que

$$\left\{\left(\frac{1}{a_n}\right)\right\} = \left\{\left(\frac{1}{a'_n}\right)\right\}$$

Veamos:

$$\{(a_n)\} = \{(a'_n)\} \Leftrightarrow (a_n - a'_n) \in I_0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{a_n}\right)\right\} = \left\{\left(\frac{1}{a'_n}\right)\right\} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a'_n}\right) \in I_0;$$

luego en definitiva, lo que hemos de demostrar es que $\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a'_n}\right)$ es una sucesión nula.

$$\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a'_n}\right) = \left(\frac{a'_n - a_n}{a_n a'_n}\right) = (a'_n - a_n)\left(\frac{1}{a_n a'_n}\right)$$

donde

$$\left(\frac{1}{a_n a'_n}\right)$$

es una sucesión acotada, pues

$$\frac{1}{|a_n a'_n|} < \frac{1}{K^2}$$

(en virtud del lema) y $(a'_n - a_n)$ es sucesión nula.

Ya se vio, en este mismo capítulo, que el producto de una sucesión acotada por una sucesión nula es una sucesión nula, luego

$$\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a'_n}\right) \in I_0, \qquad \text{c.q.d.}$$

Con esto hemos llegado a demostrar que los números reales forman *cuerpo*.

4.114. El cuerpo de los números racionales como subcuerpo de los números reales

Una vez creados los números reales se ha de comprobar que contienen como caso particular a los racionales.

El número real $\alpha = \{(a_n)\}$ es la clase de sucesiones de Cauchy representada por la sucesión (a_n). Vamos a identificar el número racional a con la clase de sucesiones de Cauchy representada por la sucesión constante (a), es decir, haremos $a = \{(a)\}$.

La aplicación

$$\begin{array}{c} Q \xrightarrow{f} \mathfrak{R} \\ a \longrightarrow f(a) = \{(a)\} \end{array}$$

es un homomorfismo, pues

$$f(a + b) = \{(a + b)\} = \{(a)\} + \{(b)\} = f(a) + f(b)$$

y

$$f(ab) = \{(ab)\} = \{(a)\}\{(b)\} = f(a)f(b).$$

Y, además, este homomorfismo es inyectivo, ya que

$$f(a) = \{(a)\} = \{(0)\} \Rightarrow a = 0$$

Tenemos, pues, un isomorfismo entre el cuerpo Q de los números racionales y el subcuerpo de $\mathfrak{R}$ formado por los elementos

$$[\{(a)\},\ \forall a \in Q]$$

lo que justifica la identificación.

4.115. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.1150.

Justifíquese que las sucesiones de números racionales con la adición es un grupo. Analícese si es abeliano.

4.1151.

Establézcase el semigrupo multiplicativo de las sucesiones de números racionales.

4.1152.

Demuéstrese que el conjunto de las sucesiones de números racionales con la adición y multiplicación es un anillo.

4.1153.

Pruébese que la diferencia de dos sucesiones de números racionales siempre existe.

4.1154.
Analícese si son nulas las sucesiones $1/n^2$; $n^2/(n^3 + 2)$; $1/(n - 1)$.

4.1155.
El cociente de una sucesión nula y una sucesión acotada es una sucesión nula. Demuéstrese. (Analícese previamente el enunciado.)

4.1156.
Justifíquese que son nulas las sucesiones $n/(n^2 + 1)$; $(1 + n)/n^2$.

4.1157.
Demuéstrese que las sucesiones $(2n + 1)/3n$; $(2n^2 - 1)/(2n^2 + 1)$ son convergentes.

4.1158.
Compruébese que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n + 1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

4.1159.
Calcúlese $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n^2 - 1}$.

4.2

Ordenación en el cuerpo $\mathfrak{R}$

4.21. Números reales positivos y negativos

4.22. Regla de los signos

4.23. Relación de orden en $\mathfrak{R}$

4.24. Coincidencia de la relación de orden en $\mathfrak{R}$ con la establecida en Q

4.25. El cuerpo ordenado $\mathfrak{R}$

4.26. Relaciones en $\mathfrak{R}$, consecuencias de ser un cuerpo ordenado

4.27. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.2

Ordenación en el cuerpo R

4.21. NUMEROS REALES POSITIVOS Y NEGATIVOS

Se dice que un número real $\{(a_n)\}$ es *positivo en sentido estricto* si $\exists r \in Q, r > 0$ tal que $a_n > r$ para $n > n'$; es decir, cuando todos los términos de a_n son mayores que un cierto $r > 0$, desde uno de ellos, el $a_{n'}$, en adelante.

Se afirma que el número real $\{(a_n)\}$ es *nulo* cuando $\{(a_n)\} = \{(0)\}$, o lo que es igual, cuando $(a_n) \in I_0$.

Se establece que $\{(a_n)\}$ es *positivo en sentido amplio* si es positivo en sentido estricto o nulo. Cuando se dice que es positivo, se sobreentiende que se habla en sentido amplio.

El número real $\{(a_n)\}$ es *negativo* si su opuesto es positivo; o sea, cuando $\{(-a_n)\}$ es positivo.

Con estas definiciones establecemos:

$$\mathfrak{R}^+ = \{x \in \mathfrak{R}/x \text{ es positivo}\}$$
$$\mathfrak{R}^- = \{x \in \mathfrak{R}/ - x \in \mathfrak{R}^+\}$$

Proposición 1. $\mathfrak{R}^+ \cap \mathfrak{R}^- = \{(0)\} =$ elemento nulo.

En efecto: supongamos $\{(a_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \cap \mathfrak{R}^- \wedge \{(a_n)\} \neq \{(0)\}$.

1) $\{(a_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \underset{\text{(definición)}}{\Leftrightarrow} \exists r_1 > 0 / a_n > r_1$ para $n > n_1$.

2) $\{(a_n)\} \in \mathfrak{R}^- \underset{\text{(definición)}}{\Leftrightarrow} -\{(a_n)\} = \{(-a_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \underset{\text{(definición)}}{\Leftrightarrow} \exists r_2 > 0 / -a_n > r_2$ para $n > n_2$.

De 1) y 2) se deduce que para $n >$ máx (n_1, n_2) se verifica $a_n > r_1$ y también $a_n < -r_2$,

lo cual es absurdo, pues un número no puede ser al mismo tiempo positivo y negativo estrictamente.

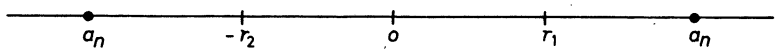


Fig. 4.8

Todas las definiciones que se acaban de establecer descansan sobre la primera, es decir, la de número real positivo. Tenemos que comprobar que esta definición es independiente de la sucesión (a_n) que tenemos como representante del número real, o sea que, si $\{(a_n)\} = \{(a'_n)\}$, también se verifica que $a'_n > r_1 > 0$ desde un valor de n en adelante.

Veamos:

Por hipótesis, $a_n - a'_n \in I_0$, es decir, que $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 / |a_n - a'_n| < \varepsilon$ para $n > n_1$ que equivale a $a_n - \varepsilon < a'_n < a_n + \varepsilon$ para $n > n_1$; y si al mismo tiempo $n > n'$, se verifica $a_n > r$, o sea, $a_n - \varepsilon > r - \varepsilon$. Luego

$$[a'_n > a_n - \varepsilon > r - \varepsilon] \quad \text{para} \quad n > \text{máx}\,(n', n_1), \qquad \text{c.q.d.}$$

Con esto hemos demostrado que la positividad es una cualidad de la clase de sucesiones (número real) y no de la sucesión que se toma como representante.

Proposición 2. *La suma de dos números reales positivos es un número real positivo.*

En efecto

$$\{(a_n)\} \text{ positivo} \Leftrightarrow \exists r_1 > 0 / a_n > r_1 \quad \text{para} \quad n > n_1$$
$$\{(b_n)\} \text{ positivo} \Leftrightarrow \exists r_2 > 0 / b_n > r_2 \quad \text{para} \quad n > n_2$$

Hemos de demostrar que $\{(a_n + b_n)\}$ es positivo, o sea que

$$\exists r > 0 / a_n + b_n > r \quad \text{para} \quad n > n'$$

De las condiciones de la hipótesis resulta que

$$a_n + b_n > r_1 + r_2 \quad \text{para} \quad n > n_1, n_2;$$

luego se puede tomar $n' = \text{máx}\,(n_1, n_2)$ y $r = r_1 + r_2$.

En el anterior razonamiento se ha supuesto $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$, pero es perfectamente válido si r_1 o r_2 son iguales a cero.

Proposición 3. *El producto de dos números reales positivo es un número real positivo.*

$$\{(a_n)\} \text{ positivo} \Leftrightarrow \exists r_1 > 0 / a_n > r_1 \quad \text{para} \quad n > n_1$$
$$\{(b_n)\} \text{ positivo} \Leftrightarrow \exists r_2 > 0 / b_n > r_2 \quad \text{para} \quad n > n_2$$

Se ha de demostrar que $\{(a_n b_n)\}$ es positivo, o sea que

$$\exists r > 0 / a_n b_n > r \quad \text{para} \quad n > n'.$$

De las condiciones de la hipótesis se deduce que $a_n b_n > r_1 r_2$ siempre que $n > n_1, n_2$, luego se puede tomar $r = r_1 r_2$ y $n' = \text{máx}\,(n_1, n_2)$.

Si uno de los factores fuese nulo, $\{(a_n)\} = \{(0)\}$, es decir, $(a_n) \in I_0$, el producto $\{(a_n b_n)\}$ también lo sería, pues sabemos que toda sucesión (b_n) de Cauchy es acotada, y el producto de una sucesión acotada por una sucesión nula es una sucesión nula.

4.22. REGLA DE LOS SIGNOS

Hemos visto en la proposición 3 que el producto de dos números positivos es un número positivo. Veamos las consecuencias:

1.ª) El producto de un número positivo y otro negativo es un número negativo.

En efecto:

$$\{(a_n)\} \text{ positivo} \Leftrightarrow \exists r_1 > 0 / a_n > r_1 \quad \text{para} \quad n > n_1$$

$$\{(b_n)\} \text{ negativo} \Leftrightarrow -\{(b_n)\} = \{(-b_n)\} \text{ positivo} \Leftrightarrow \exists r_2 > 0 / -b_n > r_2 \quad \text{para} \quad n > n_2.$$

De ambas hipótesis se deduce:

$$a_n[-b_n] > r_1 r_2, \quad \text{para} \quad n > \text{máx}\,(n_1, n_2);$$

luego $\{(a_n[-b_n])\}$ es positivo; y como

$$\{(a_n)\}\{(b_n)\} = \{(a_n b_n)\} = -\{(a_n[-b_n])\},$$

resulta que

$$\{(a_n)\}\{(b_n)\} \text{ es negativo,} \qquad \text{c.q.d.}$$

2.ª) El producto de dos números negativos es un número positivo.

En efecto:

$$\{(a_n)\} \text{ negativo} \Leftrightarrow -\{(a_n)\} = \{(-a_n)\} \text{ positivo} \Leftrightarrow \exists r_1 > 0 / -a_n > r_1 \quad \text{para} \quad n > n_1.$$

$$\{(b_n)\} \text{ negativo} \Leftrightarrow -\{(b_n)\} = \{(-b_n)\} \text{ positivo} \Leftrightarrow \exists r_2 > 0 / -b_n > r_2 \quad \text{para} \quad n > n_2.$$

Luego $[-a_n][-b_n] > r_1 r_2$ para $n > \text{máx}\,(n_1, n_2)$, o sea que

$$\{([-a_n][-b_n])\} = \{(a_n b_n)\} \text{ es positivo,} \qquad \text{c.q.d.}$$

4.23. RELACION DE ORDEN EN $\mathfrak{R}$

La relación

$$\{(a_n)\} \leq \{(b_n)\} \underset{\text{(def.)}}{\Leftrightarrow} \{(b_n - a_n)\} \in \mathfrak{R}^+$$

es una relación de orden. Para demostrarlo, basta comprobar que verifica las tres propiedades

1.ª) Reflexiva

$$\{(a_n) \leq \{(a_n)\} \Leftrightarrow \{(a_n - a_n)\} \in \mathfrak{R}^+,$$

lo cual es evidente, pues

$$\{(a_n - a_n)\} = \{(0)\}.$$

2.ª) Antisimétrica

$$\{(a_n)\} \leq \{(b_n)\} \wedge \{(b_n)\} \leq \{(a_n)\} \Rightarrow \{(a_n)\} = \{(b_n)\} \Leftrightarrow \{(a_n - b_n)\} = \{(0)\}$$

Según la definición, la anterior proposición equivale a

$$\{(b_n - a_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \wedge \{(a_n - b_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \Rightarrow \{(a_n - b_n)\} = \{(0)\}$$

como

$$\{(b_n - a_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \Leftrightarrow \{(a_n - b_n)\} \in \mathfrak{R}^-$$

resulta que

$$\{(a_n - b_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \cap \mathfrak{R}^- = \{(0)\}, \qquad \text{c.q.d.}$$

3.ª) Transitiva

$$\{(a_n)\} \leq \{(b_n)\} \wedge \{(b_n)\} \leq \{(c_n)\} \Rightarrow \{(a_n)\} \leq \{(c_n)\}$$

propiedad que, según la definición, equivale a

$$\{(b_n - a_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \wedge \{(c_n - b_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \Rightarrow \{(c_n - a_n)\} \in \mathfrak{R}^+$$

que es inmediato en virtud de la proposición 2, pues

$$\{(c_n - a_n)\} = \{(b_n - a_n)\} + \{(c_n - b_n)\}$$

Proposición 4. $\{(a_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \Leftrightarrow \{(a_n)\} \geq \{(0)\}$.

La demostración es inmediata, pues

$$\{(a_n)\} \geq \{(0)\} \underset{\text{(def.)}}{\Leftrightarrow} \{(a_n - 0)\} = \{(a_n)\} \in \mathfrak{R}^+;$$

luego se puede decir que todos los *números positivos* son mayores o iguales que

el número $\{(0)\}$, cosa que, por otra parte, coincide con la idea de la matemática elemental.

4.24. COINCIDENCIA DE LA RELACION DE ORDEN EN $\mathfrak{R}$ CON LA ESTABLECIDA EN Q

Si $a \in Q$, le habíamos identificado con el número real $\{(a)\}$

$$\{(a)\} \leq \{(b)\} \Leftrightarrow \{(b-a)\} \text{ positivo} \Leftrightarrow \exists r > 0 / b - a > r \quad \text{para} \quad n > n_1;$$

y como $b - a$ es constante, habrá de ser $b - a > r$ que es positivo; luego $b - a$ es positivo. Es decir, queda demostrado que

$$\{(a)\} \in \mathfrak{R}^+ \Leftrightarrow a \in Q^+$$

4.25. EL CUERPO ORDENADO $\mathfrak{R}$

Hemos visto que $\mathfrak{R}$ tiene estructura de cuerpo conmutativo, y al mismo tiempo es un conjunto ordenado, respecto de la relación de orden definida.

Ahora se trata de ver que $\mathfrak{R}$ es un *cuerpo ordenado*.

$(\mathfrak{R}, +, \cdot)$ estructura de cuerpo conmutativo.
$(\mathfrak{R}, \leq)$ conjunto ordenado.

Justifiquemos que se verifican los axiomas de cuerpo ordenado:

I. $\{(a_n)\} \leq \{(b_n)\} \Rightarrow \{(a_n)\} + \{(c_n)\} \leq \{(b_n)\} + \{(c_n)\}$ para $\{(c_n)\} \in \mathfrak{R}$,

expresión equivalente a

$$\{(b_n - a_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \Leftrightarrow \{(b_n + \not{c}_n - a_n - \not{c}_n)\} \in \mathfrak{R}^+,$$

lo cual es evidente.

II. $\{(a_n)\} \leq \{(b_n)\} \wedge \{(c_n)\}$ positivo $\Rightarrow \{(a_n c_n)\} \leq \{(b_n c_n)\} \left(\Leftrightarrow \{(c_n[b_n - a_n])\} \in \mathfrak{R}^+\right)$,

que equivale a decir

$$\{(b_n - a_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \wedge \{(c_n)\} \in \mathfrak{R}^+ \Rightarrow \{(c_n[b_n - a_n])\} = \{(c_n)\}\{(b_n - a_n)\} \in \mathfrak{R}^+,$$

lo cual resulta de la proposición 3.

Por tanto, la estructura de cuerpo y de orden son compatibles, y $\mathfrak{R}$ es un *cuerpo ordenado*, c.q.d.

4.26. RELACIONES EN $\mathfrak{R}$, CONSECUENCIAS DE SER UN CUERPO ORDENADO

Junto con las proposiciones que han quedado demostradas para $\mathfrak{R}$, se enumeran:

a) $\mathfrak{R}^+$ coincide con el *cono positivo* del cuerpo ordenado.

b) $\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \wedge \alpha \leq \beta \Rightarrow -\beta \leq -\alpha$.

c) $\alpha \in \mathfrak{R} \wedge \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \left(\alpha > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > 0;\ \alpha < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < 0\right)$.

d) $\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \wedge \alpha \leq \beta$, α y β del mismo signo $\Rightarrow \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\alpha}$.

e) $1 \geq \alpha \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \alpha^n \geq 0$ para $\forall n$.

4.27. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

4.270.

Considerando los números naturales 5 y 3 como reales, demuéstrese que $5 > 3$, es decir, que se verifica la definición de orden dada para los números reales.

4.271.

Demuéstrese que si $a, b \in Q$ y es $a \leq b$, se verifica $-a \geq -b$.

4.272.

Demuéstrese que si $a, b \in R$, se mantiene la relación del anterior ejercicio.

4.273.

Demuéstrese que si $a, b \in Q$, $a \leq b$ y a, b tienen el mismo signo, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

4.274.

El mismo ejercicio que el anterior, para $a, b \in R$

4.275.

Compárense los números reales

$$\left\{\left(\frac{2n^2 - n + 1}{n^2}\right)\right\}, \quad \left\{\left(3 + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

4.276.

Compárense los números reales

$$\left\{\left(\frac{1}{2n}\right)\right\}, \quad \left\{\left(\frac{n^2 - 3}{2n^2}\right)\right\}, \quad \left\{\left(\frac{-3 + 2n^2}{3n^3}\right)\right\}$$

4.277.
Demuéstrese:

$$1 \geq a \geq 0 \quad a \in Q \Rightarrow 1 \geq a^n \geq 0, \text{ para todo } n \text{ natural}$$

4.278.
Demuéstrese si $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$, siendo a y b números reales y n número natural.

4.279.
Demuéstrese que si $a \geq b$ y $c < 0 \Rightarrow bc \geq ac$.

4.3

Topología de la recta real

4.301. Introducción

4.302. Representación en la recta de los números racionales

4.303. Estudio de la aplicación de Q en R

4.304. Teorema de la biyección $\mathfrak{R} \rightarrow R$

4.3041. *Graduaciones de la recta*
4.3042. *Postulado de Arquímedes*
4.3043. *Segmentos encajados*
4.3044. *Postulado de Dedekind*
4.3045. *Sucesiones monótonas convergentes*
4.3046. *Bases para la demostración del teorema*

4.305. Valor absoluto. Entornos

4.306. Intervalos abiertos y cerrados

4.307. Puntos interiores de un conjunto

4.308. «Conjuntos abiertos» o simplemente «abiertos»

4.309. Puntos de acumulación

4.310. Puntos frontera

4.311. Puntos exteriores

4.312. Puntos aislados

4.313. Puntos adherentes

4.314. Proposiciones consecuencia de las anteriores definiciones. Cuadro resumen

4.315. Topología

4.316. Teorema de Bolzano-Weierstrass

4.317. «Conjuntos cerrados» o simplemente «cerrados»

4.318. Conjuntos compactos. Teorema de Heine-Borel

4.319. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.3

Topología de la recta real

4.301. Introducción

En este capítulo se aborda la estructura topológica de $\mathfrak{R}$; es decir, del conjunto de números reales. La topología que estudiaremos es la natural, la asociada al orden de $\mathfrak{R}$.

Antes de iniciar el estudio conviene fijarse en la correspondencia «punto de una recta»-«número real». Esta correspondencia, que se demuestra que es biunívoca, es un resultado esencial, pues permite introducir en las Matemáticas la geometría analítica, y disponer de la representación gráfica de funciones, que es auxiliar de gran valor en el análisis.

4.302. Representación en la recta de los números racionales

Se supone que el lector conoce los conceptos de segmento, segmento general (como clase de segmentos congruentes), adición de segmentos congruentes con sus propiedades, multiplicación de números naturales por segmentos, división de un segmento en partes iguales (que equivale a dividir un segmento por un número natural), y el teorema de Thales.

De todas formas, vamos a enunciar el *teorema de Thales*:

«*Si un sistema de rectas paralelas corta a dos rectas del plano, los segmentos que sobre estas dos rectas determinan se corresponden en la igualdad y en la suma.*»

Si se corresponden en la igualdad y en la suma, abreviamos diciendo que son proporcionales.

Interpretación gráfica:

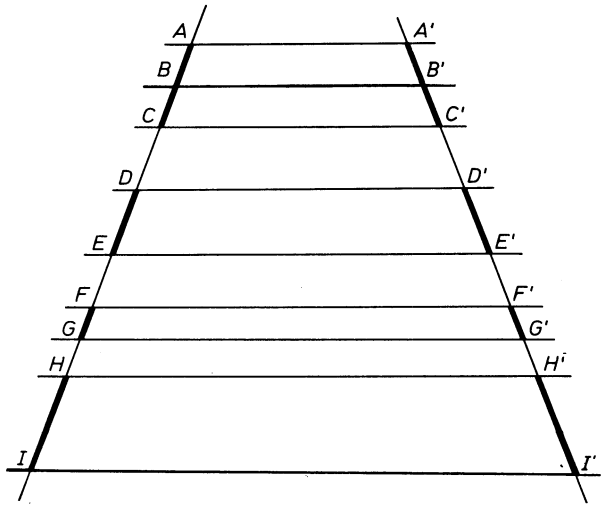


Fig. 4.9

Si $\overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{B'C'}$

Si $\overline{HI} = \overline{DE} + \overline{FG} \Rightarrow \overline{H'I'} = \overline{D'E'} + \overline{F'G'}$

Supóngase una recta en la que se ha fijado el origen O, y un sentido como positivo que se conviene en que sea desde el origen hacia la derecha, según indica la flecha.

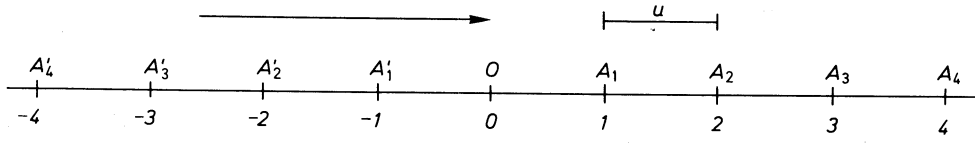


Fig. 4.10

Si establecemos un segmento fijo u al que llamaremos segmento unidad, podemos determinar puntos correspondientes a los números enteros, llevando el segmento u sucesivas veces hacia la derecha y hacia la izquierda.

Llevando u en sentido positivo desde el origen una vez, determinamos el punto A_1, al que asignamos el número 1; llevando u dos veces obtenemos el A_2, al que hacemos corresponder el 2, etc.

Si se transporta el segmento u desde el origen hacia la izquierda, o sea en sentido negativo, se van obteniendo los puntos $A'_1A'_2A'_3, \ldots$, a los que se hace corresponder los números negativos $-1, -2, -3, \ldots$

Al número entero cero le corresponde el origen O.

De esta manera hemos asignado a cada número entero un punto en la recta, que es su imagen geométrica.

De la misma forma podemos asignar un punto en la recta a cada número racional p/q positivo o negativo.

Supóngase $\frac{p}{q} > 0$.

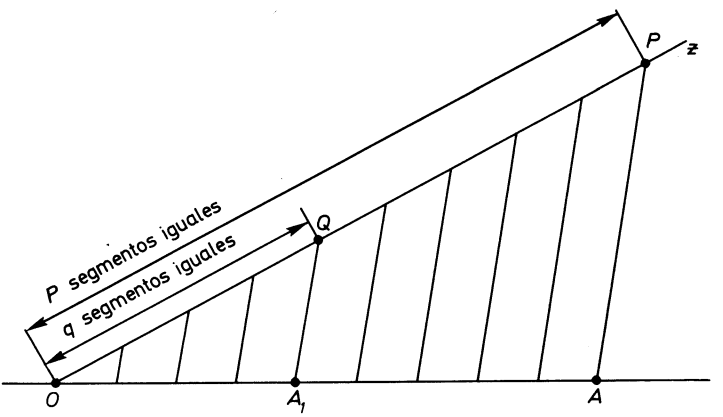


Fig. 4.11

Con origen O se considera la semirrecta Oz. Se lleva sobre Oz un segmento cualquiera, tantas veces como indiquen los números p y q, respectivamente determinados por los puntos P y Q.

Se unen Q y A_1, y por P se traza la paralela a QA_1 que determina el punto A.

Este punto es la imagen geométrica del número racional $\frac{p}{q}$.

Este resultado es lógico, aplicando el teorema de Thales; pues si $\overline{OP}$ está formado por la suma de p segmentos iguales, tales que la suma de q de ellos es $\overline{OQ}$, resultará que $\overline{OA}$ está formado por la suma de p segmentos iguales tales que la suma de q de ellos es $\overline{OA_1}$.

$\overline{OA} = p$ veces $\frac{\overline{OA_1}}{q} = \frac{p}{q}\overline{OA_1}$ y $\overline{OA_1}$ es el segmento unidad.

Si $\frac{p}{q} < 0$, se repite la misma construcción, uniendo Q con A_1' en vez de con A_1.

Como resumen de este apartado, resulta que si fijamos en una recta un sentido, un origen y un segmento unidad, a cada número racional le corresponde un punto bien definido que llamamos su imagen geométrica.

Obsérvese que basta con fijar los puntos O y A_1 para tener determinado el sentido, origen y unidad.

4.303. Estudio de la aplicación de Q en R

La aplicación de Q en R que se acaba de definir se va a representar por la letra i

$$Q \xrightarrow{i} R$$
$$\frac{p}{q} \longrightarrow i\left(\frac{p}{q}\right) = A_{p/q}$$

donde $A_{p/q}$ es el punto que corresponde al número racional $\frac{p}{q}$.

Esta aplicación es inyectiva pero no biyectiva; es decir, si se elige un punto A de R, puede ocurrir que sea la imagen de un número racional r, en cuyo caso decimos que el segmento $\overline{OA}$ tiene una longitud r; pero puede suceder que el punto A no sea imagen de ningún número racional.

La figura 4.12 proporciona ejemplos de puntos que no son imágenes de números racionales. Tales son los puntos B, B', B''.

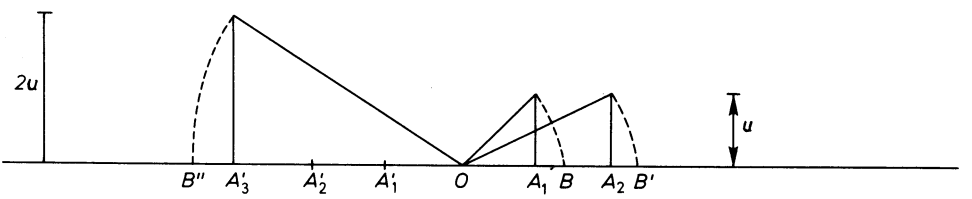


Fig. 4.12

Surge la pregunta: ¿cuál es la medida del segmento $\overline{OB}$? No podemos decir que no tiene medida, pues eso nos parece absurdo. Lo que ocurre es que los números racionales resultan insuficientes para la medición de una magnitud como la longitud, que varía continuamente.

Afortunadamente los números reales resuelven el problema mediante el teorema del apartado siguiente.

4.304. Teorema de la biyección $\mathfrak{R} \to R$

Se acaba de ver que se puede establecer una aplicación inyectiva de Q en R. En este apartado se va a comprobar que existe una aplicación biyectiva de $\mathfrak{R}$ sobre R, que es la extensión a $\mathfrak{R}$ de la anterior aplicación de Q en R.

TEOREMA. *Existe una biyección entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de la recta.*

Este teorema nos viene a decir (hablando impropiamente, puesto que se trata de conjuntos infinitos) que hay tantos números reales como puntos tiene la recta.

4.3041. *Graduaciones en la recta*

Supongamos que en una recta se han representado los números enteros, tal como se vio en el apartado 2 de este capítulo.

El conjunto de todos los puntos que corresponden a los números enteros se llamará *primera graduación.*

Supongamos ahora que al conjunto anterior le añadimos los puntos que resultan de dividir cada segmento determinado por dos consecutivos, en diez partes iguales. Al nuevo conjunto le llamaremos *segunda graduación.*

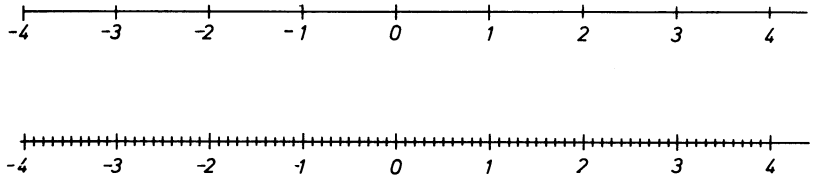


Fig. 4.13

Análogamente obtendríamos los puntos de la *tercera graduación.*

En la práctica, haciendo el dibujo a gran escala, no podremos pasar de la tercera graduación por la dificultad que representa el dibujar intervalos de amplitud menor que medio milímetro.

Sin embargo, en el razonamiento matemático nadie nos impide admitir las graduaciones 4.ª, 5.ª, . . . , 1 500.ª, . . . , etc.

Para la demostración del teorema establecido se requiere admitir dos postulados, el primero de los cuales es el

4.3042. *Postulado de Arquímedes*

Todo punto de una recta pertenece a una graduación o está contenido entre dos puntos que pertenecen a la misma.

(Y esto se verifica para cualquier graduación, o sea la 1.ª, la 2.ª, . . . , la 107.ª, . . . , etcétera.)

Este postulado viene a decir que con cualquier unidad, por pequeña que sea, puede medirse cualquier segmento, por grande que sea, por defecto y por exceso con error menor que la unidad tomada.

Arquímedes se ocupó de las medidas de objetos muy grandes con unidades muy pequeñas. Demostró que el número de granos de arena que cubrían un volumen análogo al del planeta Tierra sería un número finito. Inventó un sistema de numeración de base 10^8 con el cual se podría representar el número máximo de granos de arena necesarios de una manera sencilla ($1\,000 \times 10^{6 \times 8} = 10^{51}$).

Este hecho histórico justifica que al anterior postulado se le dé el nombre de Arquímedes aunque como tal nunca lo enunciara el científico de Siracusa.

4.3043. *Segmentos encajados*

Dada una sucesión de segmentos $\overline{A_1A_1'}$, $\overline{A_2A_2'}$, ..., $\overline{A_nA_n'}$, ..., se dice que están encajados, si cada uno está contenido en el anterior

$$\overline{A_1A_1'} \supset \overline{A_2A_2'} \supset \cdots \supset \overline{A_nA_n'} \supset \cdots$$

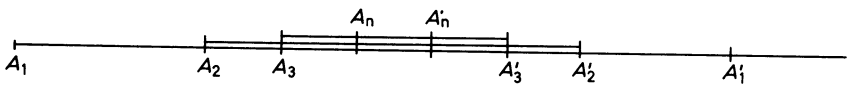


Fig. 4.14

De las sucesiones de segmentos encajados, las que más interés tienen son aquellas cuyos segmentos se hacen de longitud menor que cualquier longitud fijada por pequeña que sea, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} |\overline{A_nA_n'}| = 0$$

El segundo postulado que se necesita para la demostración del teorema es el

4.3044. *Postulado de Dedekind*

Si se dispone de una sucesión de segmentos encajados, tales que su amplitud tiende a cero, la intersección de todos ellos es un punto único.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_nA_n'} = P \text{ (punto único)}$$

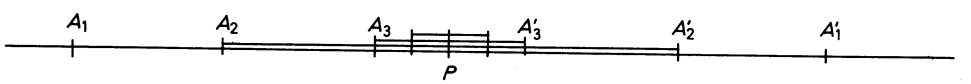


Fig. 4.15

Este postulado viene a decir que la recta es continua, en el sentido de que no tiene agujeros o poros.

Dedekind, profesor de la Escuela Politécnica de Zurich, se ocupó en 1858 del estudio de los números reales. Fue el primero que dio un tratamiento suficientemente riguroso de los mismos. Buscó una forma sencilla de establecer matemáticamente la idea de continuidad. La enunció de una manera equivalente, aunque distinta, a la anterior.

Es evidente que la intersección de una sucesión de segmentos encajados cuya amplitud tiende a cero, es un punto o el vacío. Dos puntos no puede ser, puesto

que entonces la amplitud no tiende a cero, en el sentido de que pueden encontrarse segmentos de la sucesión menores que cualquier segmento fijado, pues cualquiera de los segmentos de la sucesión ha de contener al segmento de extremos los dos puntos anteriores.

El postulado asegura que nunca la intersección es el vacío, en cuyo caso la recta dejaría de ser continua, sino un punto.

4.3045. *Sucesiomes monótonas convergentes*

Un par de sucesiones (a_n), (b_n) de números racionales se dice que son monótonas convergentes si verifican las tres condiciones siguientes:

1.ª) $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$
$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$
es decir, la primera sucesión es monótona creciente y la segunda es monótona decreciente.

2.ª) $a_m \leq b_h$ para todo m, y todo h, es decir, cualquier término de la primera sucesión es menor que cualquiera de la segunda.

3.ª) $b_n - a_n \to 0$;
es decir, la diferencia entre términos correspondientes de ambas sucesiones puede llegar a ser tan pequeña como se quiera.

El par de sucesiones monótonas convergentes equivale a una sucesión de segmentos encajados cuya amplitud tiende a cero,

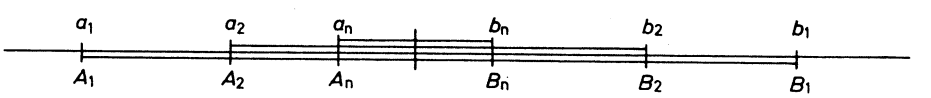


Fig. 4.16

y por tanto, define un punto en la recta, bien determinado.

4.3046. *Bases para la demostración del teorema*

Por razones del ámbito del libro, nos limitaremos a indicar las ideas en que se basa la demostración sin llegar a desarrollarla*.

a) Si se elige un punto en la recta y éste pertenece a una graduación, es un *número racional.*

b) Si no pertenece a ninguna graduación, está entre dos que pertenecen a cada una de ellas, a la primera, a la segunda, etc.
Los puntos de las sucesivas graduaciones situados a la izquierda del punto forman una sucesión de Cauchy de números racionales, monótona creciente; los que están a la derecha, forman otra monótona decreciente; ambas sucesiones son monótonas convergentes y pertenecen a la misma clase de suce-

* El lector que desee la demostración completa, puede encontrarla en V. Zorío: *Gaceta matemática*, 1.ª serie, tomo XXIV, núms. 5 y 6.

siones de Cauchy; *luego definen un número real* (que puede ser incluso racional).

c) Dado un número real, representado por una sucesión de Cauchy cualquiera, $\{(c_n)\}$, existen al menos dos sucesiones monótonas convergentes (a_n), (b_n), en la misma clase; luego determinan un punto único $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{a_n b_n}$: el de intersección de la sucesión de segmentos encajados de amplitud tendiendo a cero.

d) Dada otra pareja de sucesiones monótonas convergentes (α_n), (β_n) de la misma clase que (c_n), se demuestra que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{a_n b_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n \beta_n}.$$

Luego el punto que hacemos corresponder al número real es único.

El apartado *c*) es el de más farragosa y prolija justificación.

Este teorema hace posible la identificación de punto y número real. A cada punto corresponde un número real, su abscisa; y a cada número real un punto, su imagen geométrica.

A partir de ahora, usaremos indistintamente ambas palabras para designar el mismo concepto.

Sin el teorema de la biyección no serían posibles los sistemas de coordenadas que nos permiten identificar un punto del plano con un par ordenado de números reales, y un punto del espacio con una terna ordenada de números reales. Gracias a este teorema, como dijimos al principio del capítulo, alcanza realidad la geometría analítica.

Las representaciones gráficas facilitan mucho el estudio de funciones, y estas son posibles por el mismo teorema.

A continuación, se procede a estudiar la topología de R que es la misma que la de $\mathfrak{R}$.

4.305. Valor absoluto. Entornos

Los números reales forman un cuerpo ordenado de manera que se puede definir la aplicación *valor absoluto* como se hizo en el capítulo 4.1, para los números racionales.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{R}^+ \\ x & \longrightarrow & |x| = \text{máx}\,(x, -x) \end{array}$$

Las propiedades del valor absoluto que se vieron en los números racionales, subsisten para los números reales.

$$\begin{array}{ll} 1) & |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ 2) & |x + y| \leq |x| + |y| \\ 3) & |xy| = |x||y| \end{array}$$

Análogamente, se define el *entorno* de números reales:

Dados $\varepsilon > 0$, $a \in \mathfrak{R}$, $E_\varepsilon(a) = \{x | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x | \, |x - a| < \varepsilon\}$.

La expresión escrita representa el conjunto de puntos de la recta comprendidos entre $a - \varepsilon$ y $a + \varepsilon$.

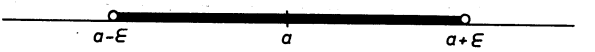


Fig. 4.17

4.306. Intervalos abiertos y cerrados

Se llama *intervalo abierto* de extremos a y b (siendo $a < b$) al conjunto de números reales x tales que $a < x < b$; se representa (a, b).

Es decir, $(a, b) = \{x | a < x < b\}$.

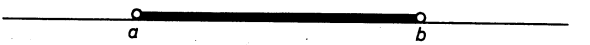


Fig. 4.18

El entorno, tal como se ha definido en el párrafo anterior, es un intervalo abierto

$$E_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$$

Se llama *intervalo cerrado* de extremos a y b (siendo $a < b$) al conjunto de números reales x tales que $a \leq x \leq b$; se representa $[a, b]$. Es decir,

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

Fig. 4.19

Se definen también los siguientes *intervalos infinitos*:

$[a, \infty) = \{x | x \geq a\}$

$(a, \infty) = \{x | x > a\}$

$(-\infty, a] = \{x | x \leq a\}$

$(-\infty, a) = \{x | x < a\}$

Fig. 4.20

También se puede considerar el conjunto de todos los números reales como un intervalo:

$$\mathfrak{R} = (-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

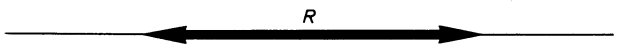


Fig. 4.21

4.307. Puntos interiores de un conjunto

Sea A un conjunto de números reales, o sea, un subconjunto de $\mathfrak{R}$: $A \subset \mathfrak{R}$.

Definición. Se dice que el punto $p \in A$ es *punto interior* de A, si existe algún intervalo S_p abierto, tal que $p \in S_p \subset A$.

En algunos libros se dice *entorno* de centro p en vez de *intervalo*, es decir, $p \in E_\varepsilon(p) \subset A$.

Ambas definiciones son equivalentes. El entorno es un intervalo simétrico respecto del punto; y dado S_p se puede determinar un entorno contenido en S_p.

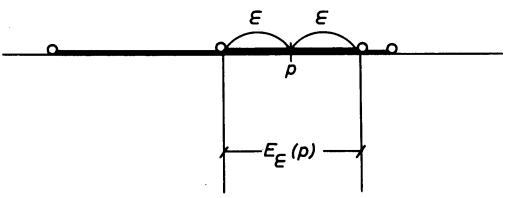


Fig. 4.22

Ejemplo

Sea $A = [1, 3] \cup \{4\} \cup \{5\} \cup [7, \infty)$

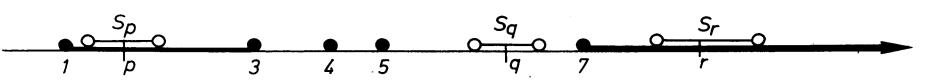


Fig. 4.23

p es interior, pues $p \in S_p \subset [1, 3] \subset A$
q es exterior, pues $q \in S_q \subset A$
r es interior, pues $r \in S_r \subset [7, \infty) \subset A$

El conjunto de todos los puntos interiores de A se representa por $\mathring{A}$, y se llama *interior de A*.

4.308. «Conjuntos abiertos» o simplemente «abiertos»

Se dice que $A \subset \mathfrak{R}$ es *abierto*, si todo punto de A es interior a A. O bien, si no existe ningún punto de A que no sea interior.

Ejemplo 1

Cualquier intervalo abierto (a, b) es un conjunto abierto

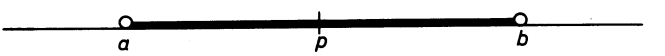


Fig. 4.24

Si p es un punto cualquiera de (a, b) se verifica $p \in (a, b) \subset (a, b)$, luego p es interior.

Obsérvese que tomamos como intervalo S_p el mismo (a, b).

Ejemplo 2

El conjunto total $\mathfrak{R}$ es abierto, pues $p \in S_p \subset \mathfrak{R}$, ya que todo intervalo es subconjunto de $\mathfrak{R}$.

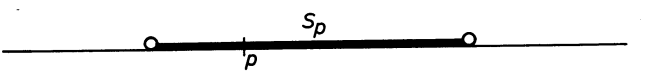


Fig. 4.25

Ejemplo 3

ϕ no tiene ningún punto que no sea interior (sencillamente, porque carece de puntos), luego es un conjunto abierto.

Ejercicio

¿Es abierto un intervalo cerrado? Razonar la respuesta.

Vamos a demostrar dos teoremas básicos sobre las propiedades de abiertos.

TEOREMA 1 *a*) *La unión de cualquier conjunto de abiertos de* $\mathfrak{R}$ *es un abierto de* $\mathfrak{R}$.

Demostración. Sean $(A_i)_{i \in I}$ un conjunto cualquiera de abiertos de $\mathfrak{R}$.

(Obsérvese que (A_i) no es una sucesión, es decir, que los subíndices son letras

o elementos de un conjunto I, e incluso números, pero no necesariamente naturales, como ocurre en el caso de las sucesiones. Es decir, que $(A_i)_{i\in I}$ es un conjunto finito o infinito de cualquier potencia.)

Sea $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Vamos a demostrar que A es un abierto, es decir, que cualquier punto de A es interior.

Sea $p \in A$, luego $\exists j \in I / p \in A_j$.

Como A_j es abierto por hipótesis, existirá un S_p tal que $p \in S_p \subset A_j$, pero $A_j \subset A = \bigcup_{i\in I} A_i$, luego $p \in S_p \subset A_j \subset A$, c.q.d.

TEOREMA 2 *a*) *La intersección de cualquier número finito de abiertos de* $\mathfrak{R}$ *es un abierto de* $\mathfrak{R}$.

Demostración. Sea $(A_n)_{n=1\ldots h}$ una familia de abiertos formada por un número finito h.

Sea $A = \bigcap_{n=1}^{h} A_n$.

Vamos a demostrar que A es abierto, o sea, que todo punto de A es interior

$$p \in A \Rightarrow p \in A_n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots, h$$

Como por hipótesis los A_n son abiertos, resulta que existen intervalos abiertos $S_p^{\lfloor n}$ que contienen a p y contenidos en los A_n, es decir:

$$p \in S_p^{\lfloor n} \subset A_n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots, h;$$

luego

$$p \in \bigcap_{n=1}^{h} S_p^{\lfloor n} \subset \bigcap_{n=1}^{h} A_n = A$$

Si se demuestra que $\bigcap_{n=1}^{h} S_p^{\lfloor n}$ es un intervalo abierto, se ha concluido la demostración.

Para justificar que la intersección de un número finito de intervalos abiertos es un intervalo abierto, basta con demostrarlo para el caso de dos. Esto es evidente.

$(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = (a_2, b_1)$

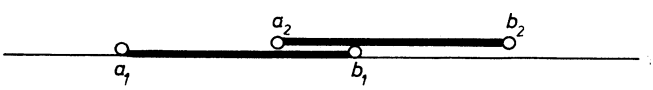


Fig. 4.26

Para agotar todas las posibilidades, cabe considerar que la familia $(A_n)_{n=1\ldots h}$ tuviese una intersección vacía. Hemos visto que el ϕ es un abierto, luego el resultado es general.

Contraejemplo

La intersección de un número infinito de abiertos puede no ser un abierto. Si $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in N$; los A_n son intervalos abiertos y por tanto, abiertos (ejemplo 1); pero $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ que *no* es abierto.

El resultado de los ejemplos 2 y 3, que es importante, vamos a reunirlo en el siguiente

TEOREMA 3 *a*) *El conjunto* $\mathfrak{R}$ *y el conjunto* ϕ *son abiertos.*

4.309. Puntos de acumulación

Si $A \subset \mathfrak{R}$, se dice que $p \in \mathfrak{R}$ es punto de acumulación de A, si todo intervalo abierto que contenga a p contiene algún punto de A distinto de p.

Simbólicamente:

$$(p \in \mathfrak{R}, \text{ punto de acumulación de } A) \Leftrightarrow (\forall S_p \Rightarrow A \cap (S_p - \{p\}) \neq \phi)$$

El conjunto de puntos de acumulación de A se representa por A' y se llama conjunto derivado.

Vamos a comprobar que todo punto interior es de acumulación. Si $p \in \mathring{A}$, existe un intervalo abierto S_p tal que $p \in S_p \subset A$ por definición de punto interior.

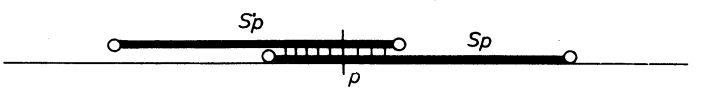


Fig. 4.27

Demostremos que cualquier intervalo abierto S'_p que contenga a p contiene puntos de A. Es inmediato, pues $S'_p \supset S'_p \cap S_p$ y $S'_p \cap S_p$ está formado por puntos de A, toda vez que $S'_p \cap S_p \subset S_p$ y por hipótesis, $S_p \subset A$.

Ejemplo 1

«0» es punto de acumulación del conjunto

$$\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \cdots\},$$

pues cualquier intervalo que contenga el origen, contiene puntos del conjunto.

Ejemplo 2

Sea $A = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \cdots\} \cup (2, 3) \cup (4, \infty)$; ¿qué puntos de acumulación tiene?

Fig. 4.28

Son puntos de acumulación del conjunto, además de los puntos interiores, los puntos 0, 2, 3 y 4, o sea, $A' = \{\text{puntos interiores}\} \cup \{0, 2, 3, 4\}$.

Ejemplo 3

Z no tiene puntos de acumulación

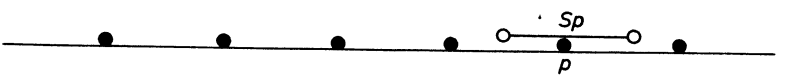


Fig. 4.29

$$\forall p \in Z\ \exists S_p/(S_p - p) \cap Z = \phi, \text{ por tanto, } Z' = \phi.$$

Ejemplo 4

Q tiene como punto de acumulación cualquiera de $\mathfrak{R}$, o sea $Q' = \mathfrak{R}$. (Es consecuencia de la definición de número real y del teorema de la biyección.)

4.310. Puntos frontera

Definición. Se dice que un punto $p \in \mathfrak{R}$ es punto frontera del conjunto $A \subset \mathfrak{R}$, si todo intervalo que contiene a p tiene puntos de A y del complementario de A.

Simbólicamente:

$(p \in \mathfrak{R}$ es frontera de $A) \Leftrightarrow [\forall S_p \Rightarrow (S_p \cap A \neq \phi) \wedge (S_p \cap (\mathfrak{R} - A) \neq \phi)]$

El conjunto de todos los puntos frontera de A lo representaremos por A^*.

Ejemplo 1 $A = (0, 1) \cup (2, 3) \cup \{5\}$

Fig. 4.30

Son puntos frontera del conjunto A: 0, 1, 2, 3, 5, o sea

$$A^* = \{0, 1, 2, 3, 5\}$$

Ejemplo 2

$A = [1, 2) \cup (2, 3] \cup \{4\}$

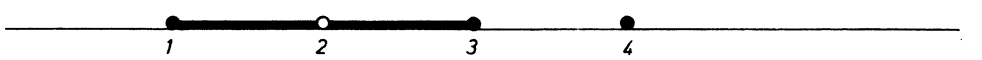


Fig. 4.31

Son puntos frontera: 1, 2, 3, 4. $A^* = \{1, 2, 3, 4\}$.

4.311. Puntos exteriores

Se dice que un punto $p \in \mathfrak{R} - A$ es punto exterior al conjunto A, si existe algún intervalo abierto que contiene a p y disjunto de A.

Simbólicamente:

$$(p \in \mathfrak{R} - A, \text{ exterior a } A) \Leftrightarrow \exists S_p / S_p \cap A = \phi$$

Ejemplo

$A = (0, 1) \cup (2, 3)$

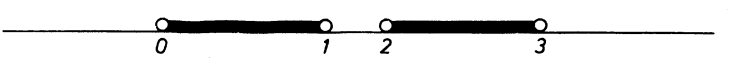


Fig. 4.32

Son puntos exteriores $(-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (3, \infty)$.

4.312. Puntos aislados

Se dice que un punto $p \in A$ es un punto aislado de A si existe un intervalo abierto que contiene a p y no contiene a ningún otro punto de A.

Simbólicamente:

$$(p \in A \text{ es punto aislado}) \Leftrightarrow \exists S_p / S_p \cap A = \{p\}$$

Ejemplo

$$A = (0, 3) \cup \{4\} \cup [5, \infty)$$

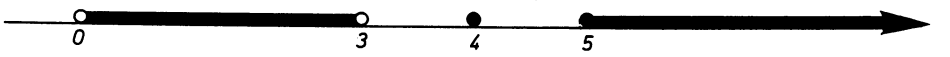


Fig. 4.33

El único punto aislado es el 4.

4.313. Puntos adherentes

Se establece que $p \in \mathfrak{R}$ es punto adherente de un conjunto $A \subset \mathfrak{R}$, si en cualquier intervalo que contenga a p hay puntos de A.

Está claro que todo punto de A es adherente. Los puntos de acumulación de A son también adherentes, aunque no pertenezcan a A.

El conjunto de todos los puntos adherentes de A constituye la adherencia de A, y se representa $\bar{A}$.

La adherencia también se llama cierre o clausura.

4.314. Proposiciones consecuencia de las anteriores definiciones. Cuadro resumen

I. Los puntos de un conjunto A o son puntos aislados de A o son puntos de acumulación de A.

En efecto: Si $p \in A$, o existe un intervalo abierto que contiene a p en el que no hay otro punto de A, en cuyo caso p es aislado, o todo intervalo que contiene a p contiene otros puntos de A distintos de p, en cuyo caso p es punto de acumulación de A.

II. Todo punto interior de A es un punto de acumulación de A.

Ya se demostró en el apartado 9.

III. Los puntos de acumulación de A, o son puntos interiores de A o son puntos frontera de A.

En efecto: Si $p \in A'$, o existe un intervalo abierto que contiene a p formado sólo por puntos de A, en cuyo caso p es punto interior, o todo intervalo abierto que contiene a p contiene puntos del complementario de A, en cuyo caso es frontera.

CUADRO RESUMEN

- $p \in A$
  - 1. p. aislado (todo punto aislado también es frontera).....
  - 2. p. acumulación
    - *i)* p. interior.....
    - *ii)* p. frontera.....
- $p \notin A$
  - 1. p. acumulación (frontera)
  - 2. p. exterior

} p. adherentes

4.315. Topología

Podemos decir que la *recta topológica* es el par formado por la recta $\mathfrak{R}$ y el conjunto $\mathfrak{A}$ de abiertos.

O sea: Recta topológica = $(\mathfrak{R}, \mathfrak{A})$, donde los elementos de $\mathfrak{A}$ son los abiertos de $\mathfrak{R}$.

Se ha visto que los *abiertos* verifican las tres propiedades:

1. *Toda reunión de abiertos es un abierto.*
2. *La intersección de cualquier número finito de abiertos es un abierto.*
3. *La recta total $\mathfrak{R}$ y el conjunto vacío ϕ son abiertos.*

Sea un conjunto cualquiera E, y un conjunto $\mathfrak{A}$, cuyos elementos son partes de E. El par $(E, \mathfrak{A})$ se llama *espacio topológico* si se verifica:

1. *Toda reunión de elementos de $\mathfrak{A}$ es un elemento de $\mathfrak{A}$.*
2. *La intersección de un número finito de elementos de $\mathfrak{A}$ es un elemento de $\mathfrak{A}$.*
3. *El conjunto E y el conjunto ϕ son elementos de $\mathfrak{A}$.*

Esta definición de espacio topológico está inspirada en la recta topológica que vimos anteriormente, pero su validez es general. En este caso las tres proposiciones anteriores se toman como axiomas; en la recta topológica eran propiedades.

«$\mathfrak{A}$» define una *topología* sobre E, y sus elementos se siguen llamando abiertos. En general, sobre E podemos definir muchas topologías. En el caso de la recta podíamos haber definido otras topologías distintas. La topología definida en la recta es la *asociada a la relación de orden*; en efecto, basta observar que la relación de orden nos ha permitido definir los intervalos abiertos; a partir de éstos, el punto interior, y finalmente los conjuntos abiertos.

Dar los conjuntos abiertos es dar *la topología.*

Ejercicio 1

Demuéstrese que $\mathfrak{A}_1 = \{\mathfrak{R}, \phi\}$ es una topología. (Se llama la *topología grosera.*)

Ejercicio 2

Demuéstrese que $\mathfrak{A}_2 = \mathcal{P}(\mathfrak{R})$ (partes de $\mathfrak{R}$) es una topología. (Se llama la *topología discreta.*)

Después de todo lo visto, surge la pregunta: ¿para qué sirve la topología?; es decir, dado un conjunto E, ¿para qué definimos sobre E una topología? O bien, ¿para qué estructuramos E topológicamente?

La respuesta es: Para poder utilizar el concepto «proximidad» y todos los conceptos con él relacionados, como límites, continuidad, derivabilidad.

La palabra «proximidad» está relacionada con la palabra «entorno» en el lenguaje ordinario. Así, por ejemplo, nuestro entorno es todo aquello que nos rodea; nuestro ambiente, lo que está próximo.

Una vez establecida la definición de topología se define el entorno a partir de ella, a saber: basándonos en los abiertos.

Definición general de entorno: Un conjunto E_1 de un espacio topológico se dice que es entorno de un punto p_1 si existe un abierto A_1 tal que $p_1 \in A_1 \subset E_1$.

Esta definición contiene como caso particular a la que venimos utilizando desde el principio.

4.316. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Este teorema da condiciones suficientes para que un conjunto tenga al menos un punto de acumulación. Se enuncia así:

Todo conjunto acotado de infinitos puntos tiene al menos un punto de acumulación.

Demostración. Decir que A está acotado quiere decir que todos sus puntos están dentro de un intervalo cerrado $[a, b]$.

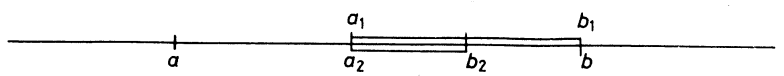


Fig. 4.34

Se divide $[a, b]$ por el punto medio. Si en $[a, b]$ hay infinitos puntos de A, tiene que haber infinitos en alguna de las dos mitades. Si existen en una mitad, se elige, y si en las dos, elegimos la de la derecha (por convenio).

Sea $[a_1, b_1]$ la mitad elegida.

Aplicamos el mismo razonamiento a $[a_1, b_1]$ obteniendo $[a_2, b_2]$, etc.

Obtenemos así una sucesión de segmentos encajados cuya amplitud tiende a cero.

La intersección de estos segmentos es un punto

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

P es punto de acumulación de A, pues cualquier intervalo abierto que contenga P contiene a los segmentos a partir de uno dado.

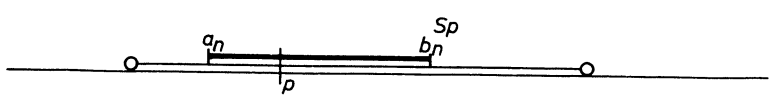


Fig. 4.35

Como los segmentos $[a_n, b_n]$ contienen puntos de A, hemos concluido.

4.317. «Conjuntos cerrados» o simplemente «cerrados»

Definición: Un conjunto $B \subset \mathfrak{R}$ se dice que es *cerrado* si su complementario $\mathfrak{R} - B$ es abierto.

Ejemplo 1

$\mathfrak{R}$ es cerrado puesto que su complementario ϕ es abierto, como vimos.

Ejemplo 2

ϕ es cerrado puesto que su complementario $\mathfrak{R}$ es abierto.

Ejemplo 3

Un intervalo cerrado $[a, b]$ es cerrado puesto que su complementario $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ es abierto como reunión de conjuntos abiertos. (Los intervalos lo son.)

En particular, un punto es un conjunto cerrado.

A continuación se desarrollan los teoremas de conjuntos cerrados que son correlativos de los que se vieron para conjuntos abiertos.

TEOREMA 1 *b*) *Toda reunión de un número finito de cerrados es un conjunto cerrado.*

Demostración

Sea $F = F_1 \cup \cdots \cup F_h$ una reunión de un número finito de cerrados.
Por la ley de dualidad de Morgan se verifica

$$CF = C(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_h) = CF_1 \cap CF_2 \cap \cdots \cap CF_h$$

$CF_1, CF_2, \ldots, CF_h$ son abiertos por ser complementarios de cerrados, luego su intersección es un abierto (teorema 2 del apartado 4.308).

Luego, si CF es abierto, F es cerrado, c.q.d.

Contraejemplo

La reunión de infinitos cerrados puede no serlo. Por ejemplo, un intervalo abierto es una reunión de infinitos puntos, y cada punto es un cerrado; sin embargo, un intervalo abierto es un abierto.

TEOREMA 2 *b*) *La intersección de cualquier conjunto de cerrados es un cerrado.*

Demostración

Sea $F = \bigcap_{i \in I} F_i$, siendo $(F_i)_{i \in I}$ una familia finita o infinita de cerrados.

$$CF = \left(C \bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} (CF_i) \qquad \text{(ley de Morgan)}$$

CF es abierto como reunión de abiertos ya que CF_i lo son, luego F es cerrado, c.q.d.

Para los conjuntos cerrados tenemos las propiedades

1. *Toda reunión de un número finito de cerrados es un cerrado.*

2. *La intersección de cualquier conjunto de cerrados es un cerrado.*
3. $\mathfrak{R}$ *y* ϕ *son cerrados.*

NOTA. Hay conjuntos que no son abiertos ni cerrados, por ejemplo, un intervalo semiabierto $[a, b)$.

4.318. Conjuntos compactos. Teorema de Heine-Borel

Se podía haber establecido un *conjunto abierto* mediante la siguiente

Definición. Se llama conjunto abierto a una reunión de intervalos abiertos. Esta definición es equivalente a la que dimos $A = \mathring{A}$, pues si

$$p \in A \Rightarrow \exists S_p / p \in S_p \subset A$$

de donde

$$\bigcup_{p \in A} p \subset \bigcup_{p \in A} S_p \subset A, \quad \text{pero} \quad \bigcup_{p \in A} p = A$$

luego

$$A \subset \cup S_p \subset A \quad \text{o sea} \quad A = \cup S_p$$

Y, recíprocamente, toda reunión de intervalos abiertos es un conjunto abierto por el teorema 1 *a*) del apartado 4.308, pues los intervalos abiertos son abiertos.

Definición de conjunto compacto. Entendamos previamente que la familia de subconjuntos de $\mathfrak{R}$, $(C_i)_{i \in I}$ recubre un subconjunto C si se verifica que $C \subset \bigcup_{i \in I} C_i$. Se dice que los $(C_i)_{i \in I}$ forman un recubrimiento de C.

Se establece que un subconjunto A de $\mathfrak{R}$ es *compacto*, si todo recubrimiento de A por abiertos tiene un subrecubrimiento finito.

Consecuencia de la definición es que toda reunión de un número finito de compactos es compacto.

Teorema de Heine-Borel: *Un segmento cerrado es un compacto.*

Demostración. Basta comprobar que de todo recubrimiento formado por infinitos intervalos abiertos se puede extraer un subconjunto finito que lo recubre.

Vamos a demostrarlo por reducción a lo absurdo, es decir, suponiendo que hacen falta infinitos intervalos abiertos para recubrirlo.

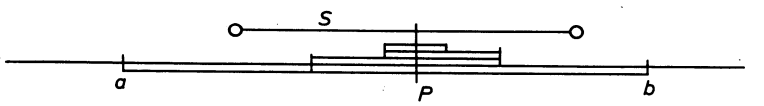


Fig. 4.36

Se divide el segmento por el punto medio. Si se necesitan infinitos intervalos abiertos para recubrir $[a, b]$, también son necesarios infinitos para recubrir alguna de las dos mitades. Esta mitad se divide por el punto medio y, repitiendo el razonamiento, harán falta infinitos para recubrir alguna de las dos nuevas mitades.

Se obtiene así una sucesión de segmentos encajados que determinan un punto único $P \in [a, b]$; luego P pertenece a algunos de los infinitos segmentos que, según la hipótesis, recubren $[a, b]$; sea S. Y aquí está la contradicción: la sucesión de segmentos encajados estará contenida en S a partir de uno de ellos, y bastará uno solo, el S, para recubrirla, siendo así que habíamos supuesto que, para cada uno de los segmentos de la sucesión, hacían falta infinitos.

Los infinitos intervalos abiertos

$$\left(-\left(2-\frac{1}{n}\right),\ \left(2-\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

recubren el intervalo abierto $(-2, 2)$ y no existe ningún subconjunto finito que lo recubra, luego $(-2, 2)$ no es compacto.

El teorema de Heine-Borel se utiliza para demostrar que toda función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua. Está muy relacionado con las materias del capítulo y por ello hemos considerado conveniente su inclusión, aunque no será necesaria su aplicación de modo inmediato.

4.319. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.3190.

Determínense los puntos de acumulación del conjunto

$$\left\{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

4.3191.

Demuéstrese que $\bar{A} = A \cup A'$.

4.3192.

Demuéstrese que $A^* = \bar{A} - \mathring{A}$.

4.3193.

Demuéstrese que $Q' = R$.

4.3194.

Determínense Z', $\mathring{Z}$, Z^*, $\bar{Z}$.

4.3195.

Si $A = (1, 2) \cup [3, 4) \cup (4, 5] \cup \{7 - \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{8\}$, determínense

$$\mathring{A},\ \bar{A},\ A',\ A^*$$

4.3196.

Dado el conjunto de intervalos abiertos

$$G = \left\{\left(-\left(2-\frac{1}{n}\right),\ \left(2-\frac{1}{n}\right)\right);\ n = 1, 2, \ldots\right\},$$

comprobar:

1) que recubre al intervalo abierto $(-2, 2)$;
2) que ningún subconjunto finito lo recubre.
3) La anterior afirmación expresa que no es aplicable el teorema de Heine-Borel. ¿Por qué?

4.3197.

Demuéstrese que A cerrado $\Leftrightarrow A = \bar{A} \Leftrightarrow A \supset A'$.

4.3198.

Demuéstrese que A' es cerrado.

4.3199.

Demuéstrese que

a) $A' = \mathring{A} \cup A^* - \{\text{puntos aislados}\}$.
b) $Q' = Q^*$
c) todo abierto es una reunión de intervalos abiertos
d) un conjunto con un número infinito de puntos, tiene todos sus puntos aislados.

4.4

Acotaciones en el conjunto $\mathfrak{R}$

4.41. Introducción

4.42. Cotas. Extremos de conjuntos acotados

4.43. Conjuntos acotados de números reales

4.44. Sucesiones de Cauchy de números reales

4.45. Límites superior e inferior de un conjunto de números reales

4.46. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.4

Acotaciones en el conjunto R

4.41. INTRODUCCION

En este capítulo vamos a desarrollar ideas relacionadas con el concepto de acotación. Primero daremos unas definiciones válidas para cualquier conjunto totalmente ordenado. A continuación enunciaremos dos teoremas relativos a la buena acotación que se puede establecer en conjuntos acotados de números reales, o sea, a la existencia de extremos superior e inferior.

Finalmente hablaremos de las sucesiones de Cauchy en $\mathfrak{R}$, y definiremos los límites superior e inferior.

4.42. COTAS. EXTREMOS DE CONJUNTOS ACOTADOS

Sea C un conjunto *totalmente ordenado*, o sea, tal que sobre sus elementos se ha establecido una relación de orden $\leq$, y dos elementos cualesquiera son comparables, lo que quiere decir que si $a, b \in C$ se verifica $a \leq b$ o bien $b \leq a$.

Definición 1) Si A es un subconjunto de C, se dice que A está *acotado superiormente* si existe un elemento de C que representamos por K y llamaremos *cota superior* tal que $a \leq K$ para todo $a \in A$.

Simbólicamente:

$$(A \subset C \text{ está acotado superiormente}) \Leftrightarrow \forall a \in A \; \exists K \in C / a \leq K$$

Naturalmente, si K es una cota superior, también lo será cualquier elemento $K_1 > K$. Pero K_1 no nos interesará, pues una cota superior es tanto mejor cuanto menor sea.

¿Cuál sería la cota superior ideal? Sería la menor de las cotas superiores, en caso de que existiera, pues hay muchas veces que no existe.

Ejemplo

Si $C = Q$ = {conjunto de números racionales} y A = {3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159, . . .} es el conjunto de números racionales que definen por defecto el número real π, resulta que A está acotado superiormente y sin embargo no existe la menor de las cotas; dada cualquier cota superior se puede encontrar otra menor, es decir, se puede mejorar.

Definición 2) Se dice que un conjunto $A \subset C$ está *inferiormente acotado* si existe un elemento de C, que llamaremos *cota inferior*, tal que $k \leq a$ para todo $a \in A$.

Simbólicamente:

$$(A \subset C \text{ está inferiormente acotado}) \Rightarrow \forall a \in A\ \exists k \in C / k \leq a$$

Es claro que si k es una cota inferior también lo será cualquier elemento $k_1 \leq k$. Pero una cota inferior es tanto mejor cuanto mayor sea. De las cotas inferiores, la ideal sería la mayor, en caso de que existiera.

Ejemplo

Si $C = Q$ = {conjunto de números racionales} y A = {3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; . . .} es el conjunto de números racionales que van aproximando por exceso al número π, resulta que este conjunto está acotado inferiormente, pero no existe la mayor de las cotas inferiores. Cualquier cota inferior puede mejorarse en el sentido de encontrar una mayor.

Definición 3) Cuando un conjunto está acotado superior e inferiormente, se dice simplemente que está *acotado*.

Definición 4) Se llama *extremo superior* o *supremo* de un conjunto A, acotado superiormente, a la menor de las cotas superiores. Se representa por $\overline{\text{ext}}\ A$ o bien $\sup A$.

El extremo superior es la cota ideal de las cotas superiores de un conjunto, pero en un ejemplo anterior se vio que a veces no existe. En el supuesto de que exista, el extremo superior puede pertenecer al conjunto A y se dice que *accesible*. En caso contrario se dice *inaccesible*.

El extremo superior accesible es el *máximo* del conjunto A, o sea

$$K \equiv \overline{\text{ext}}\ A = \text{máx}\ (A) \Rightarrow K \in A$$

Definición 5) Se llama *extremo inferior* o *ínfimo* de un conjunto A, acotado inferiormente, a la mayor de las cotas inferiores. Se representa por $\underline{\text{ext}}\ A$ o bien $\inf A$.

El extremo inferior es la mejor de las cotas inferiores de un conjunto, pero ya

sabemos que a veces no existe. Si existiera puede pertenecer o no al conjunto A; en el primer caso se llama *accesible*, en el segundo se llama *inaccesible*.

El extremo inferior accesible es el mínimo del conjunto A, es decir

$$k \equiv \underline{\text{ext}}\, A = \min(A) \Rightarrow k \in A$$

4.43. CONJUNTOS ACOTADOS DE NUMEROS REALES

Si se toma como conjunto C del apartado anterior, el conjunto $\mathfrak{R}$ de números reales, resultan los dos teoremas siguientes, que aseguran la existencia de las cotas óptimas o extremos. En conjuntos acotados A de un conjunto C cualquiera, pueden no existir los extremos; cuando $C \equiv \mathfrak{R}$ existen siempre.

TEOREMA 1) *Todo conjunto de números reales acotado superiormente tiene extremo superior.*

Demostración

Sea el conjunto de números reales A, acotado superiormente por K.

Vamos a realizar una participación del conjunto $\mathfrak{R}$ de números reales en dos clases que llamaremos $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$.

$\mathfrak{R}_1 = \{$conjunto de números reales que son superados por algún número real de $A\}$.

$\mathfrak{R}_2 = \{$conjunto de números reales que no son superados por ningún número real de $A\}$.

Es claro que $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2 = \phi$; luego $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ forman una partición de $\mathfrak{R}$.

Las clases $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ son distintas del vacío, pues $K \in \mathfrak{R}_2$ y si $a, b \in A$, $a \neq b$ será $a < b$ o bien $b < a$; y de los dos $\{a, b\}$ el menor pertenece a $\mathfrak{R}_1$ por ser superado por el otro que pertenece a A.

Consideremos entonces elementos cualesquiera α_1, β_1, tales que $\alpha_1 \in \mathfrak{R}_1$, $\beta_1 \in \mathfrak{R}_2$.

Formemos el número real $\dfrac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$; este número pertenece a $\mathfrak{R}_1$ o bien a $\mathfrak{R}_2$. Si pertenece a $\mathfrak{R}_1$ le llamamos α_2; si pertenece a $\mathfrak{R}_2$ le llamamos β_2, o sea:

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \in \mathfrak{R}_1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \qquad \beta_2 = \beta_1$$

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \in \mathfrak{R}_2 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 \qquad \beta_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$$

Repetimos el proceso indefinidamente y resultará

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset [\alpha_3, \beta_3] \supset \cdots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \cdots$$

o sea, forman una sucesión de segmentos encajados. Además

$$\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{n-1}}$$

luego

$$\lim_{n \to \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$$

Por el postulado de Dedekind, su intersección determina un punto único p. Este punto es tal que en cualquier entorno suyo hay puntos de la sucesión (α_n) y (β_n).

Vamos a demostrar que el punto p es el extremo superior de A, en cuatro pasos.

1.º *Ningún $a \in A$ puede ser mayor que p* [Fig. 4.37 a)], pues si existiera un $a \in A$, tal que $a > p$, considerando el entorno de centro p y de radio ε (menor que $a - p$), llegaríamos al absurdo de que existen elementos de (β_n) dentro del entorno, y serían, por tanto, superados por a, contra la hipótesis de que ningún β_n es superado por ningún elemento de A. Recuérdese que $(\beta_n) \subset \mathfrak{R}_2$.

2.º *En todo entorno de p existen puntos de A*, pues en todo entorno de p existen puntos de (α_n) y los α_n son superados por algún elemento de A, ya que $(\alpha_n) \subset \mathfrak{R}_1$.

3.º *El punto $p \in \mathfrak{R}_2$*. Puesto que $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ forman una partición de $\mathfrak{R}$, se verifica $p \in \mathfrak{R}_1$ o bien $p \in \mathfrak{R}_2$. Pero según hemos visto $p \notin \mathfrak{R}_1$, pues no puede ser superado por ningún punto de A (según 1.º), luego $p \in \mathfrak{R}_2$.

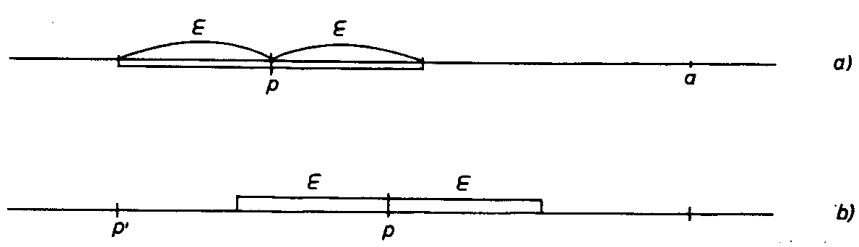


Fig. 4.37

4.º *p es el menor de los puntos de $\mathfrak{R}_2$*, ya que si existiera $p' \in \mathfrak{R}_2$, tal que $p' < p$, se podría tomar un entorno de centro p y radio $\varepsilon < p - p'$, y llegaríamos al absurdo de que en ese entorno existen puntos de A (por 2.º) y por tanto mayores que $p' \in \mathfrak{R}_2$ [Fig. 4.37 *b*)].

Luego p es el *extremo superior*, c.q.d.

El punto $p = \overline{\text{ext}}\,(A)$ es punto de acumulación de A si $p \notin A$. Si $p \in A$ puede ser o no ser punto de acumulación.

Si un conjunto no está acotado superiormente carece de extremo superior, pero por convenio diremos que su extremo superior es $+\infty$.

De un modo análogo se demostraría el

TEOREMA 2) *Todo conjunto de números reales acotado inferiormente tiene extremo inferior.*

Si un conjunto de números no está acotado inferiormente carece de extremo inferior; no obstante, por convenio diremos que su extremo inferior es $-\infty$.

NOTA. Estos teoremas se hubiesen reducido mucho en su demostración si el postulado de Dedekind se hubiese establecido en la forma que él lo estableció y que se puede expresar así:

«Si efectuamos en $\mathfrak{R}$ una partición en dos clases, $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$, tal que cualquier punto de $\mathfrak{R}_1$ *no* se encuentre a la derecha de ningún punto de $\mathfrak{R}_2$, existe un punto único que realiza la partición, que es el mayor de $\mathfrak{R}$ o el menor de $\mathfrak{R}_2$.»

El postulado tal como se enunció en el capítulo anterior tiene aplicación al plano y al espacio, lo cual representa una ventaja sobre el postulado original (las clásicas «cortaduras» de Dedekind). Además lo hemos adoptado así porque es la forma más usual.

4.44. SUCESIONES DE CAUCHY DE NUMEROS REALES

La definición y propiedades de sucesiones de Cauchy de números reales son las mismas que hemos visto para números racionales. Todas las propiedades se basaban en la estructura de cuerpo ordenado de Q y por tanto son extensibles a $\mathfrak{R}$ toda vez que $\mathfrak{R}$ es también un cuerpo ordenado.

Todas las sucesiones convergentes de números racionales son de Cauchy; sin embargo, hay sucesiones de Cauchy de números racionales que no son convergentes.

En el caso de sucesiones de números reales *existe identidad entre sucesiones de Cauchy y sucesiones convergentes.* La demostración se basa en el teorema de Bolzano-Weierstrass, que sólo es válido para la recta real, no para la recta racional.

TEOREMA. *Toda sucesión de Cauchy de números reales tiene límite.*

Demostración

Es sabido que toda sucesión de Cauchy (a_n) tiene sus términos acotados, es decir $-K < a_n < K$ para todo n, y una cierta cota K.

Como consecuencia del teorema de Bolzano-Weierstrass el conjunto formado por los infinitos términos de la sucesión tiene por lo menos un punto de acumulación.

Sea este punto a. Vamos a demostrar que a es el único punto de acumulación: Si existiese otro punto de acumulación a' podríamos determinar dos entornos disjuntos de centros a y a', respectivamente.

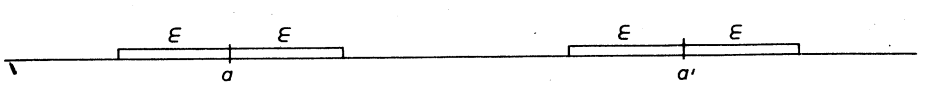


Fig. 4.38

En cada uno de estos entornos habrá infinitos términos de la sucesión tales que $a_{n_1} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; $a_{n_2} \in (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)$ con subíndices n_1 y n_2 mayores que cualquier número prefijado. Por tanto

$$a_{n_2} - a_{n_1} > a' - a - 2\varepsilon,$$

contra la hipótesis de que (a_n) es sucesión de Cauchy (y por tanto siempre que $n_1, n_2 > n(a' - a - 2\varepsilon)$ se verificaría $a_{n_2} - a_{n_1} < a' - a - 2\varepsilon$.

Luego no puede existir más punto de acumulación que el a.

Veamos que $a = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Basta con demostrar que, fuera de cualquier entorno $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, hay solamente un número finito de términos.

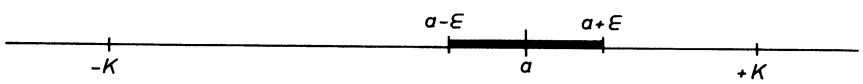


Fig. 4.39

Es inmediato que si hubiera infinitos términos en $(a + \varepsilon, K)$ o en $(-K, a - \varepsilon)$ se tendrían más puntos de acumulación, contra lo que hemos demostrado. Esto concluye la demostración.

Se dice que $\mathfrak{R}$ es *completo* porque toda sucesión de Cauchy tiene límite.

4.45. LIMITES SUPERIOR E INFERIOR DE UN CONJUNTO DE NUMEROS REALES

Diremos que un punto L es *el límite superior* de un conjunto $A \subset \mathfrak{R}$ si en todo entorno $E_\varepsilon(L)$ existen puntos de A distintos de L, y es finito el conjunto de los puntos de A, mayores que $L + \varepsilon$.

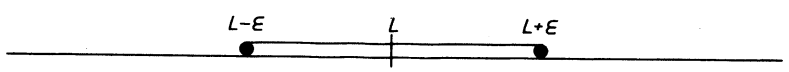


Fig. 4.40

Consecuencias de la definición son:

I) L es punto de acumulación de A.

En efecto, en todo entorno de L, excluido L, hay puntos de A.

II) L es el mayor de los puntos de acumulación de A.
En efecto: Supongamos que no es así, o sea, que existe un punto de acumulación $L' > L$. Consideremos los entornos de L y L' que sean disjuntos, para lo cual basta tomar radios menores que $\frac{L' - L}{2}$.

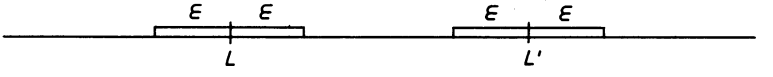


Fig. 4.41

En el entorno $E_\varepsilon(L')$ ha de haber infinitos puntos de A, puesto que L' es de acumulación; y estos puntos superan a $L + \varepsilon$, contra la hipótesis, ya que se supuso que era finito el número de los que superaban a $L + \varepsilon$.

Se dice que un punto 1 es el *límite inferior* de un conjunto $A \subset \mathcal{R}$, si en todo entorno de 1, $E_\varepsilon(1)$ existen puntos de A distintos de 1, y es finito el número de puntos de A menores que $1 - \varepsilon$.

Consecuencias de la definición, con demostración análoga a las anteriormente establecidas, son:

I) 1 es punto de acumulación de A.
II) 1 es el menor de los puntos de acumulación de A.

Es muy importante no confundir *extremo superior* y *límite superior*; tampoco son sinónimos *extremo inferior* y *límite inferior*.

Ejemplo 1

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\}$$

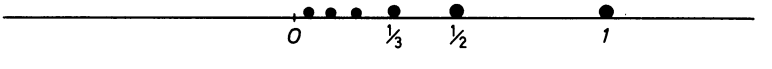


Fig. 4.42

$\overline{\text{ext}}\, A = 1$ límite superior de $A = 0$
$\underline{\text{ext}}\, A = 0$ límite inferior de $A = 0$

Ejemplo 2

$$B = \{1\} \cup [3, 5)$$

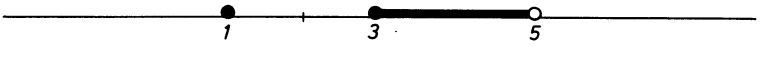


Fig. 4.43

$\overline{\text{ext}}\, B = 5$ $\quad$ lím sup $B = 5$
$\underline{\text{ext}}\, B = 1$ $\quad$ lím inf $B = 3$

Ejemplo 3

$$C = \{2\} \cup (4, 6] \cup \{7\}$$

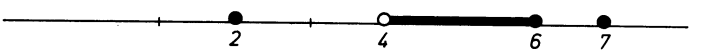


Fig. 4.44

$\overline{\text{ext}}\, C = 7$ $\quad$ lím sup $C = 6$
$\underline{\text{ext}}\, C = 2$ $\quad$ lím inf $C = 4$

4.46. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

4.460.
Hállense los extremos superior e inferior del conjunto

$$\{1, 2\} \cup [3, 7] \cup \left\{8 + \frac{1}{n}; \quad n = 1, 2, \ldots\right\}$$

4.461.
Determínense los extremos superior e inferior del conjunto

$$(0, 2] \cup \{4 + 3^n \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots\}$$

4.462.
Hállense los límites superior e inferior del conjunto $\{-1\} \cup [0, 3]$.

4.463.
Fíjense los límites superior e inferior del conjunto

$$\{3 - \frac{1}{n} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots, n\}$$

4.464.
Hállense los límites y extremos superior e inferior del conjunto

$$\{2 - \frac{1}{3n} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots\} \cup [3, 5] \cup \{6 + \frac{1}{n} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots\}$$

4.5

Funciones reales de una variable real

4.51. Introducción

4.52. Definición de función

4.53. Función real de variable real. Gráficas

4.54. Funciones multiformes. Ramas. Puntos de ramificación

4.55. Función inversa

4.56. Funciones unívocas o «uno a uno»

4.561. *Establecimiento*
4.562. *Teorema de existencia de función inversa*

4.57. Composición de funciones

4.58. Algunos tipos particulares de funciones

4.59. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.5

Funciones reales de una variable real

4.51. INTRODUCCION

En este capítulo se estudia la definición de función en general y, en particular, la función real de variable real. Esta tiene la gran ventaja de la representación gráfica, lo que permite en muchos casos de funciones experimentales definirlas por puntos y estimar la clase de función que más se ajusta, a fin de hallar su ecuación. Otras veces no es necesario acudir a la representación analítica, sino que es *suficiente* con la gráfica bien dibujada, para determinar los valores aproximados que en las aplicaciones prácticas se necesita.

Siempre que se introduzca una nueva definición o se establezca una propiedad daremos su interpretación gráfica, e insistiremos en dejar clara la diferencia entre gráfica de una función y curva (que se estudiará con precisión en los capítulos referentes a la Geometría). Debe advertirse que, desde el punto de vista de la pura lógica matemática, no es necesario acudir a la representación gráfica para desarrollar la teoría de funciones. La representación gráfica es tan sólo una ayuda valiosa para interpretar las propiedades de las funciones y conceptos relacionados (continuidad, monotonía, derivabilidad, etc.).

En el capítulo presente se estudia la función unívoca, función inversa, función compuesta y, finalmente, los tipos particulares de funciones: par, impar, periódicas, monótonas.

4.52. DEFINICION DE FUNCION

Se llama *función* a una aplicación entre conjuntos de números*.

La clase más general de números son los complejos, que contienen a los demás como clases particulares; en vista de ello, la definición más general de función podría ser:

Función es la aplicación de un subconjunto A de $\mathbb{C}$, en $\mathbb{C}$, que es lo que se llama *función compleja de una variable compleja.*

$A \subset \mathbb{C}$

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{f} \mathbb{C} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$$

Si se considera la aplicación de un subconjunto A de $\mathbb{R}$, en $\mathbb{R}$

$A \subset \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$$

se tendrá análogamente la *función real* de una *variable real.*

Ejercicio

¿A qué se llama función compleja de una variable real?;
¿y función real de una variable compleja?

Obsérvese que la función compleja de una variable compleja comprende en particular a los otros tipos.

Terminología. En una función llamamos *dominio* al conjunto *original* de la aplicación, y llamamos *recorrido* al conjunto *imagen* de la aplicación.

La letra que representa a uno cualquiera de los elementos del dominio se llama *variable independiente* o simplemente *variable.* Es corriente utilizar la letra x.

La letra que representa a uno cualquiera de los elementos del recorrido se denomina *variable dependiente* o *función.* Se acostumbra a utilizar la y.

La función f se representa escrita en la forma

$$y = f(x),$$

y puede venir dada en forma analítica como ocurre con las funciones más elementales $y = 3x^2$, $y = \log x$, $y = \operatorname{sen}^2 x$, etc.

* Ex profeso hemos decidido escribir esta definición que no concuerda con la dada en el capítulo 2.2 del tema primero de nuestra obra, por considerar muy formativo para el estudiante de estos niveles enfrentarse sin escándalo a establecimientos dispares, por otro lado, consagrados en la bibliografía. De cualquier forma, aquí y allí son suficientes las apoyaturas didácticas para evitar confusionismo y, por el contrario, enriquecerse con un aprendizaje comparado.

Ha de tenerse presente que f es la «aplicación» y puede venir definida por una fórmula, por una tabla de valores, por una gráfica, etc.

Ejemplo

Sea la función f definida de la siguiente forma:

$$f(x) = x \quad \text{si } x = \text{número racional}$$
$$f(x) = 1 \quad \text{si } x = \text{número irracional}$$

Una función se dice *real* si su recorrido es un subconjunto de $\mathfrak{R}$; se dice *compleja* si es un subconjunto de $\mathfrak{C}$. Al decir «de una variable real» o «de una variable compleja» quiere decirse que los conjuntos originales están formados por números reales o por números complejos, respectivamente.

Destacamos en la definición «de *una* variable» porque puede haber funciones cuyo dominio sea un subconjunto de $\mathfrak{R}^n$ o $\mathfrak{C}^n$ en vez de $\mathfrak{R}$ o $\mathfrak{C}$; es decir, un dominio cuyos elementos sean conjuntos de n números, en cuyo caso se dice función «de variable vectorial» o de «n variables».

$$A \subset \mathfrak{R}^n \quad A \xrightarrow{f} \mathfrak{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{R} \quad f(x) \in \mathfrak{R}$$

Análogas consideraciones se harían para $A \subset \mathfrak{C}^n$.

Ejemplo

$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ es una función real «de dos variables reales» x_1, x_2; o bien es una función de la variable vectorial $x = (x_1, x_2)$.

Generalizando lo anterior, tendríamos las «funciones vectoriales de variables vectoriales» que son aplicaciones de subconjuntos A de $\mathfrak{R}^n$ en $\mathfrak{R}^m$.

$$A \subset \mathfrak{R}^n \quad A \xrightarrow{f} \mathfrak{R}^m$$
$$x \longrightarrow f(x),$$

donde x está formado por un conjunto ordenado de n números reales, y $f(x)$ por un conjunto ordenado de m números reales, o sea

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{R}$$
$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \quad f_1(x), \ldots, f_m(x) \in \mathfrak{R}$$

También se pueden definir las «funciones vectoriales de variables vectoriales» sobre $\mathfrak{C}$ en vez de sobre $\mathfrak{R}$; es decir, como aplicaciones de subconjuntos de $\mathfrak{C}^n$ en $\mathfrak{C}^m$; aunque este tipo de funciones tiene mucho menos desarrollo.

La justificación de estas definiciones la comprenderá el lector después de estudiar el capítulo de espacios vectoriales; pues si K es un cuerpo conmutativo resultará que K^n es un espacio vectorial. Y $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{C}$ son cuerpos conmutativos.

NOTA. A título informativo y para dar al estudiante una visión de futuro en el estudio del Análisis matemático, diremos que $\mathfrak{R}^n$ (y $\mathfrak{C}^n$) es espacio vectorial con una norma y completo, pero de dimensión finita. El Análisis se ocupa en general de espacios de dimensión infinita, llamados espacios de Hilbert. Es decir, que las funciones son aplicaciones cuyos conjuntos inicial y final no tienen por qué ser espacios $\mathfrak{R}^n$ (llamados espacios euclídeos), sino en general espacios de Hilbert (u otros más generales: los espacios de Banach).

4.53. FUNCION REAL DE VARIABLE REAL. GRAFICAS

Como ha quedado definido en el apartado anterior, una función real de variable real es una aplicación de un subconjunto A de $\mathfrak{R}$, en $\mathfrak{R}$

$$A \subset \mathfrak{R} \qquad \begin{array}{l} A \xrightarrow{f} \mathfrak{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$$

La función se representa $y = f(x)$.

A es el dominio de la función y en la definición no se impone ninguna limitación; puede ser cualquiera. En la práctica los dominios que interesan son los abiertos de $\mathfrak{R}$, o bien conjuntos que contienen abiertos de $\mathfrak{R}$. (Recordemos que un abierto equivale a una reunión de intervalos abiertos.)

Si A es el dominio, representaremos por $f(A)$ el recorrido.

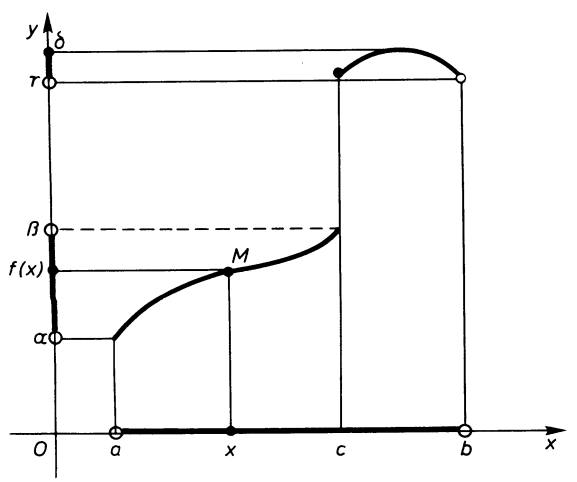
Como la función es una aplicación, resulta que al número real x del dominio le corresponde un número real *único*: $f(x)$.

Si en el plano fijamos unos ejes coordenados, podemos identificar cada punto del plano con un par ordenado de números reales: sus coordenadas, y recíprocamente. Esto es posible en virtud del teorema de la biyección entre $\mathfrak{R}$ y R.

El conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$ para $x \in A$ constituye la gráfica de la función $y = f(x)$.

Ejemplo

La figura adjunta representa la gráfica de una función.



dominio $= (a, b)$
recorrido $= (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \delta]$

Fig. 4.45

Está dibujado un punto genérico de la gráfica $M(x, f(x))$.

La gráfica de una función ha de ser tal que cualquier recta paralela al eje de las y, la corte como máximo en un punto, toda vez que a cada x le corresponde un $f(x)$ único, por tratarse de aplicación.

Se disponen a continuación cinco ejemplos de gráficas de funciones.

dominio: (a, d)
recorrido: $[\alpha, \beta)$

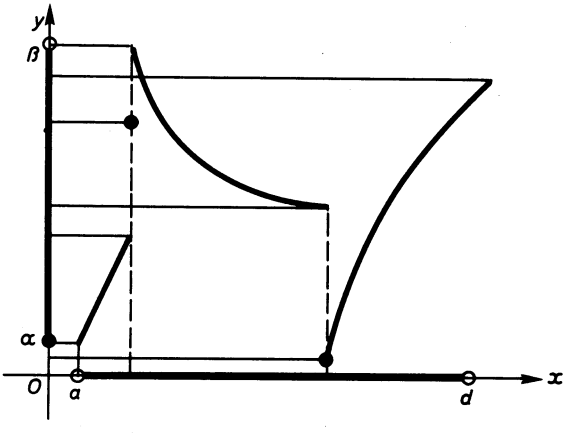


Fig. 4.46

$y = x^2$

dominio: $(-\infty, +\infty)$
recorrido: $[0, \infty)$

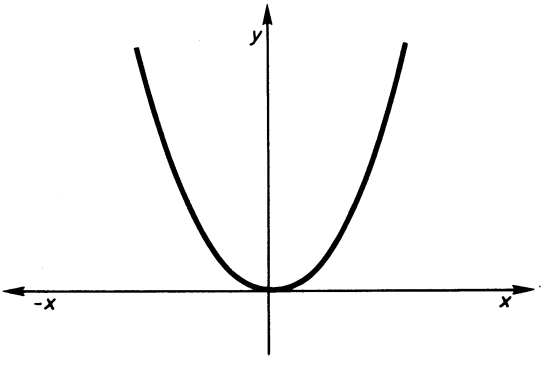
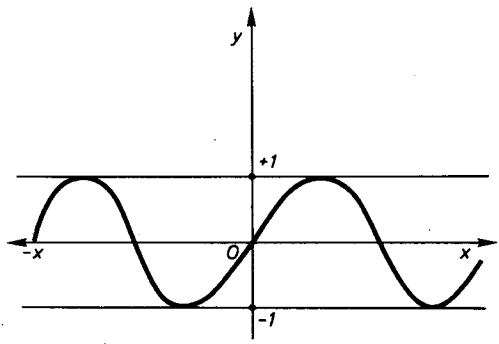


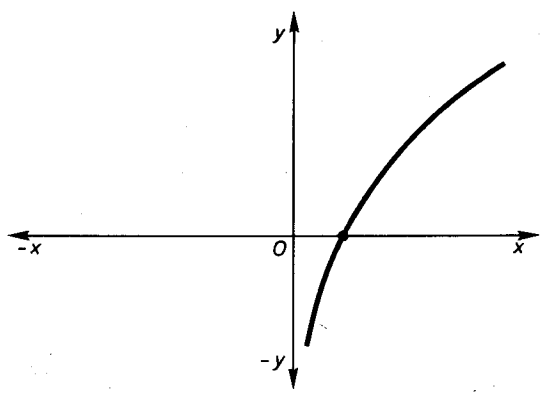
Fig. 4.47



$y = \operatorname{sen} x$

dominio: $(-\infty, +\infty)$
recorrido: $[-1, +1]$

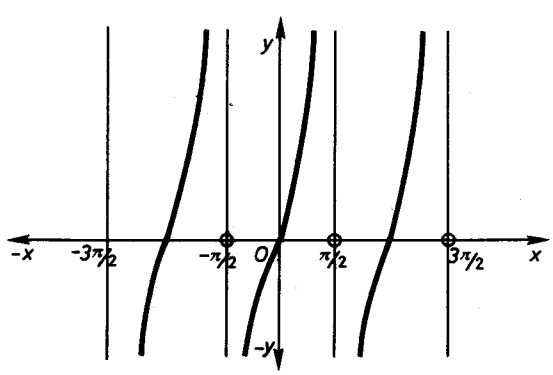
Fig. 4.48



$y = \log x$

dominio: $(0, +\infty)$
recorrido: $(-\infty, +\infty)$

Fig. 4.49



$y = \operatorname{tg} x$

dominio: $\mathfrak{R} - \{(2K + 1)\frac{\pi}{2};\ K \in$
recorrido: $(-\infty, +\infty)$

Fig. 4.50

4.54. FUNCIONES MULTIFORMES. RAMAS. PUNTOS DE RAMIFICACION

Hemos dejado dicho que una gráfica representa a una función, siempre que cualquier paralela al eje y la corte a lo sumo en un punto. Si nos encontramos con una «curva» en el sentido «intuitivo», toda vez que no hemos definido lo que se entiende por curva, esta curva no sería la gráfica de una función, desde el momento en que encontremos una paralela al eje y que la corte en más de un punto. Sin embargo, tal «curva» podrá descomponerse en un conjunto de funciones.

Sea la «curva»

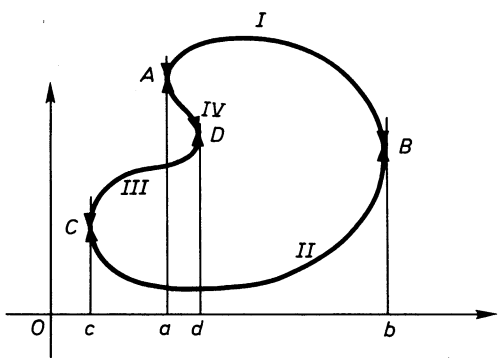
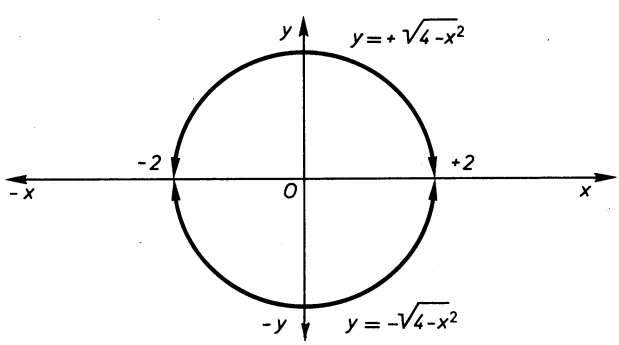


Fig. 4.51

Trazando tangentes paralelas al *eje y* descomponemos la curva en cuatro trozos, señalados por I, II, III y IV, cada uno de los cuales representa la gráfica de una función. El conjunto de las cuatro funciones se llamará *función multiforme*, que no es una función propiamente dicha, sino una colección de funciones. Cada una de las funciones que componen una función multiforme se llama *rama*. Los puntos tales como c, a, d, b, donde coinciden dos ramas, se llaman *puntos de ramificación*.

Ejemplo

Hallar las ramas y puntos de ramificación de la función multiforme $y^2 = 4 - x^2$.



$$\text{ramas} \begin{cases} y_1 = +\sqrt{4 - x^2} \\ y_2 = -\sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

$$\text{puntos de ramificación} \begin{cases} x = +2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ejercicio

Hallar las ramas y puntos de ramificación de $3x^2 - 5y^2 - 6 = 0$.
Idem de $y^2 - 4x = 0$.

4.55. FUNCION INVERSA

Dada una función $f: A \to \mathfrak{R}$, supongamos que existe una función $g: B \to \mathfrak{R}$, tal que se verifique $g(f(x)) = x$, para todo $x \in A$. Esto implica que el recorrido de f está contenido en el dominio de g*, pues $g(f(x))$ no estaría definido si $f(x) \notin B$.

La función g se llama *inversa* de f.

Naturalmente, la función inversa puede no existir. En el siguiente apartado se dispone, en forma de teorema, la condición necesaria y suficiente para que exista función inversa.

Si nos dan una función en forma analítica $y = f(x)$, y podemos «despejar la x», resultará que la expresión que queda al despejar $x = g(y)$ será la función inversa *en el caso* de que sea función, es decir, que a cada valor de la y corresponde un valor único de la x. Aquí se han cambiado los papeles entre las variables dependiente e independiente, es decir, que la y en este caso es la variable independiente o variable, y la x es la variable dependiente o función. Ahora bien, como es costumbre representar por x la variable y por y la función, escribiremos $y = g(x)$.

Resumiendo: Dada $y = f(x)$ despejamos la $x = g(y)$ y cambiamos la x por la y, o sea $y = g(x)$.

Ejemplo 1

$y = 5x - 7 \Rightarrow x = \dfrac{7 + y}{5} \Rightarrow y = \dfrac{7 + x}{5}$, es decir, $y = \dfrac{7 + x}{5}$ es la función inversa de $y = 5x - 7$.

Ejemplo 2

$y = 3^x \Rightarrow x = \log_3 y \Rightarrow y = \log_3 x$, es decir, que $y = \log_3 x$ es la función inversa de $y = 3^x$.

---

* Si le es necesario, consulte el lector el capítulo 2.2 del tomo I. Allí encontrará apoyaturas gráficas para estos conceptos algebraicos.

Ejemplo 3

$$y = x^2 + 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y - 4}.$$

La función $y = x^2 + 4$ no tiene función inversa, toda vez que para todo valor de y hay más de un valor (dos en este caso) de la x.

Sin embargo, se puede considerar que la función tiene una función inversa que es multiforme formada por dos ramas:

$$y = +\sqrt{x - 4} \quad \text{primera rama}$$
$$y = -\sqrt{x - 4} \quad \text{segunda rama}$$

¿Qué relación existe entre las gráficas de una función y su inversa? Son simétricas respecto a la bisectriz $y = x$.

En efecto: A cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f, corresponde como punto simétrico el punto $M' = (f(x), g(f(x))) = (f(x), x)$ de la gráfica de la función inversa g. (Recuérdese que para obtener el punto simétrico de un punto respecto de la primera bisectriz basta cambiar el orden de sus coordenadas. O sea, el simétrico de $M = (1, 5)$ es $M' = (5, 1)$).

Se puede decir de una manera formal que $g : B \to \mathfrak{R}$ es la *función inversa de* $f : A \to \mathfrak{R}$. si se verifica

1.º $f(A) \subset B$

2.º $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$,

en cuyo caso se representa $g \equiv f^{-1}$.

4.56. FUNCIONES UNIVOCAS O «UNO A UNO»*

4.561. Establecimiento

Se dice que una función f es *función unívoca* o «*uno a uno*» si es una aplicación inyectiva, es decir, si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Como consecuencia, la gráfica de una función unívoca será tal que cualquier paralela al eje de las x la corta a lo sumo en un punto.

Ejemplo 1

$y = e^x$ es función unívoca, pues $e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. (Fig. 4.53.)

Cualquier paralela al eje x corta a la gráfica en un solo punto.

Ejemplo 2

$y = \operatorname{sen} x$ no es función unívoca, pues $\operatorname{sen} x_1 = \operatorname{sen} x_2 \not\Rightarrow x_1 = x_2$.

---

* Se remite a la nota de la página 74.

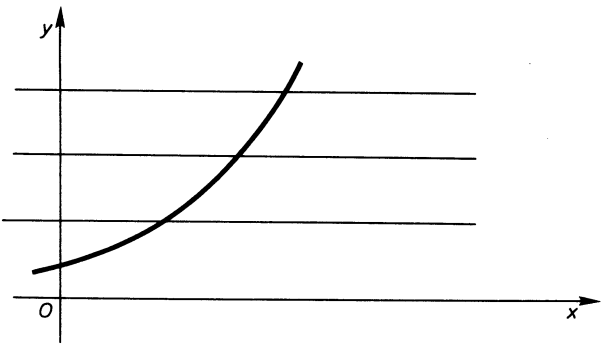


Fig. 4.53

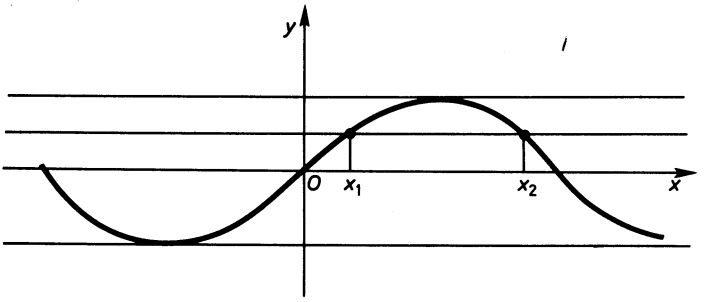


Fig. 4.54

Hay paralelas al eje x que cortan a la gráfica en más de un punto (en este caso infinitos).

Ejemplo 3

$y = x^2$ no es unívoca, pues $x_1^2 = x_2^2 \not\Rightarrow x_1 = x_2$.

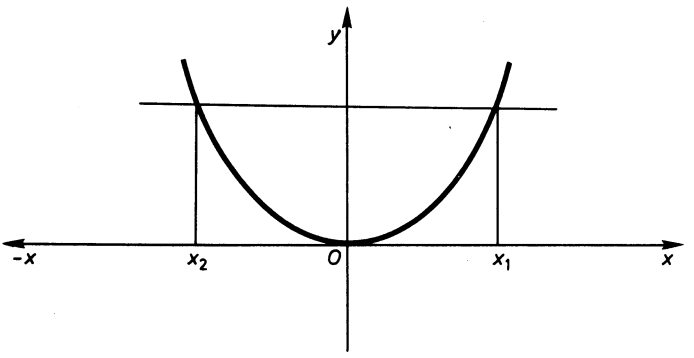


Fig. 4.55

Existen paralelas al eje x que cortan a la gráfica en más de un punto (en este caso en dos).

Ejemplo 4

$y = \log x$ sí que es unívoca, pues $\log x_1 = \log x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

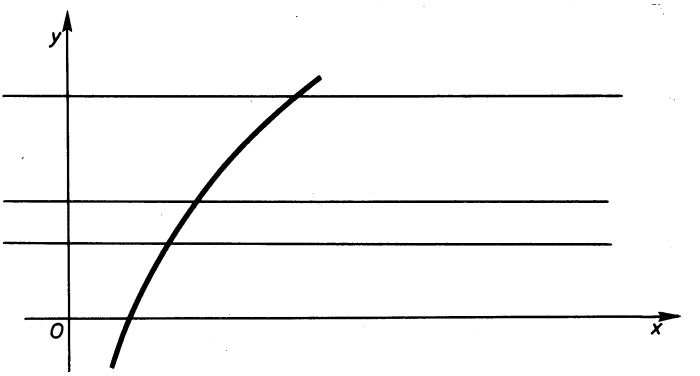


Fig. 4.56

Las paralelas al eje x cortan a la gráfica en un solo punto.

4.562. Teorema de existencia de función inversa

La condición necesaria y suficiente para que una función tenga inversa es que sea unívoca. La función inversa también es unívoca.*

Demostración. Si f es función, .

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2);$$

si f es unívoca,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Luego f función unívoca equivale a

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Definimos la función $g: B \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que

1) $B = f(A)$; 2) $g(f(x)) = x$, $\forall x \in A$.

* De nuevo, recomendamos como muy provechosa la consulta del capítulo 2.2 de nuestra Algebra básica.

Se ha de ver que g es función. Si esto es así, está claro que g es la función inversa de f, pues verifica las dos condiciones establecidas en el apartado anterior.

Veamos que g es función, es decir, que dado $f(x_1)$, su imagen mediante g es única, o lo que es lo mismo, que

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

En efecto:

$$f(x_1) = f(x_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} g(f(x_1)) = g(f(x_2));$$

(1) def. f. unívoca.
(2) def. de g.

Luego no sólo hemos demostrado que g es función, sino también que es unívoca, y por tanto queda concluida la demostración.

Ejemplo

$y = e^x$ es únívoca, por lo que tiene función inversa que es $y = Lx$

$$\begin{array}{ll} A \xrightarrow{e(\ )} \mathfrak{R} & A = \mathfrak{R} \\ x \longrightarrow e^x & e^A = (0, +\infty) = \mathfrak{R}_+ \\ B \xrightarrow{L(\ )} \mathfrak{R} & \\ x \longrightarrow Lx & B = (0, +\infty) = \mathfrak{R}_+ \end{array}$$

$y = Lx$ es la inversa de $y = e^x$, pues se verifica:
1) $B = e^A$; 2) $Le^x = x$ para todo x.

Ejercicio

Demuéstrese que $y = x^3$ tiene función inversa.
Establézcase.

4.57. COMPOSICION DE FUNCIONES

Si nos dan la función $y = \text{sen } x^2$, para obtener el valor de y, una vez fijado el valor de la variable $x = a$ se ha de calcular a^2, *esto es la imagen de a en la función* x^2, y después sen a^2, o sea *la imagen de* a^2 *en la función sen x*. Decimos que $y = \text{sen } x^2$ es una *función compuesta* en el sentido de que se obtiene de aplicar la función seno a la función cuadrado.

Análogamente, $y = \sqrt{Lx}$ es otra función compuesta, que se obtiene de aplicar la función raíz cuadrada a la función logaritmo neperiano.

El dominio de la función $y = \text{sen } x^2$ coincide con el de la función cuadrado, es decir, la función que se aplica en primer lugar. La función cuadrado $y = x^2$ está definida en toda la recta, y la función $y = \text{sen } x^2$ también lo está.

Sin embargo, la función $y = \sqrt{Lx}$ tiene un dominio que no coincide con el del neperiano, pues $y = \sqrt{Lx}$ tiene como dominio $[1, +\infty]$ mientras $y = Lx$ tiene como dominio $(0, +\infty)$.

Si consideramos $y = L(-x^2)$ también sería una función que resulta de componer $y = -x^2$ con $y = Lx$. Pero esta función *no existe*, es decir, su dominio es el conjunto vacío, si bien cada una de las funciones que se componen tienen dominios distintos de vacío.

En este momento nos planteamos la siguiente cuestión general: ¿Cuándo se pueden componer dos funciones?

Sea

$$A \xrightarrow[y = f(x)]{f} \mathfrak{R}, \qquad B \xrightarrow[y = g(x)]{g} \mathfrak{R}$$

Para que tenga sentido escribir $y = g(f(x)) = g \cdot f(x)$, que es función que llamaremos función compuesta de g con f, ha de ocurrir que $f(A) \cap B \neq \phi$, en cuyo caso el dominio de $g \cdot f$ será el conjunto A' de puntos de A cuya imagen es $f(A) \cap B$. Se puede escribir $A' = f^{-1}[f(A) \cap B]$ en el sentido que se da a f^{-1} en la teoría de conjuntos, no es que se trate de función inversa de f.

Unos diagramas de Venn ayudarán a la comprensión.

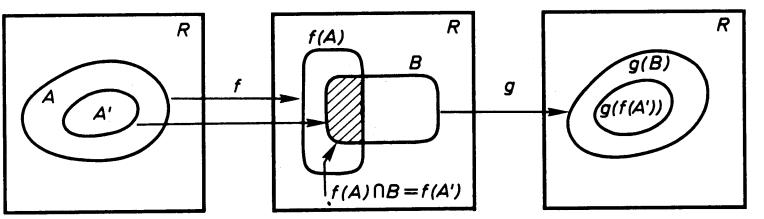


Fig. 4.57

$A' = f^{-1}[f(A) \cap B]$

Obsérvese que si $f(A) \cap B \neq \phi$ es posible componer, y el dominio de $g \cdot f$ es

$$A' = f^{-1}[f(A) \cap B] = \{x / f(x) \in B\}$$

La situación ideal es aquella en que $f(A) \subset B$ en cuyo caso $f(A) \cap B = f(A)$ y por tanto el dominio de $g \cdot f$ es $A' = f^{-1}[f(A) \cap B] = f^{-1}[f(A)] = A$. o sea, coincide con el dominio de f.

Repasemos los ejemplos que hemos visto anteriormente:

1) $y = \text{sen } x^2$. En este caso $f = (\ )^2$; $g = \text{sen}(\ )$

$$x \xrightarrow{(\ )^2} x^2 \xrightarrow{\text{sen}(\ )} \text{sen } x^2$$

$$x \xrightarrow{\text{sen}(\ )^2} \text{sen } x^2$$

recorrido de $(\ )^2 = [0, +\infty) = f(A)$
dominio de $\text{sen}(\ ) = (-\infty, +\infty) = B$
$f(A) \subset B$, luego el dominio de $g \cdot f$ es igual al de f que en este caso es $\mathfrak{R}$.

2) $y = \sqrt{Lx}$. En este caso $f = L(\ )$; $g = \sqrt{(\ )}$

$$x \xrightarrow{L(\ )} Lx \xrightarrow{\sqrt{(\ )}} \sqrt{Lx}$$
$$x \xrightarrow{\sqrt{(\ )} \cdot L(\ )} \sqrt{Lx}$$

recorrido de $L(\ ) = (-\infty, +\infty) = f(A)$
dominio de $\sqrt{(\ )} = [0, +\infty) = B$
$f(A) \cap B = [0, +\infty) \neq \phi$, luego se pueden componer y el dominio de la función compuesta será

$$A' = f^{-1}[f(A) \cap B] = \{x/f(x) \in B\} = \{x/Lx \in [0, +\infty)\} = [1, +\infty)$$

De una manera menos sistemática podemos decir que el dominio de $y = \sqrt{Lx}$ es el conjunto de las x tales que $Lx \geq 0$, o sea es $[1, +\infty)$.

3) $y = L(-x^2)$. En este caso $f = -(\ )^2$; $g = L(\ )$

$$x \xrightarrow{-(\ )^2} -x^2 \xrightarrow{L(\ )} L(-x^2)$$
$$x \xrightarrow{L(\ ) \cdot -(\ )^2} L(-x^2)$$

recorrido de $-(\ )^2 = (-\infty, 0] = f(A)$
dominio de $L(\ ) = (0, +\infty) = B$
Como $f(A) \cap B = \phi$ no se pueden componer.

Ejercicio

Determinar el dominio y el recorrido de la función compuesta

$$y = L \operatorname{sen} x.$$

4.58. ALGUNOS TIPOS PARTICULARES DE FUNCIONES

Una función $y = f(x)$ se dice que es una *función par* cuando se verifica

$$f(x) = f(-x)$$

Ejemplos: $y = \cos x$, $y = x^2 - 3$, $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y = \operatorname{Ch} x$.

Las funciones pares tienen la gráfica simétrica con relación al eje y.
Una función $y = f(x)$ se dice que es una *función impar* cuando se verifica

$$f(x) = -f(-x)$$

Ejemplos: $y = \operatorname{sen} x$, $y = x^3$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{Sh} x$.

Las funciones impares tienen su gráfica simétrica con relación al origen de coordenadas.

Una función $y = f(x)$ se dice que es *periódica* cuando existe un número a tal que $f(x + a) = f(x)$. A este número se le denomina *período*.

Ejemplos: 1) $y = \operatorname{sen} x$ es periódica de período 2π, pues $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$.
2) $y = \operatorname{tg} x$ es periódica de período π, pues $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.

Se dice que una función $y = f(x)$ es *monótona creciente* en un intervalo $[a, b]$ cuando $x_1, x_2 \in [a, b]$ y $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

La gráfica de la función será de este tipo

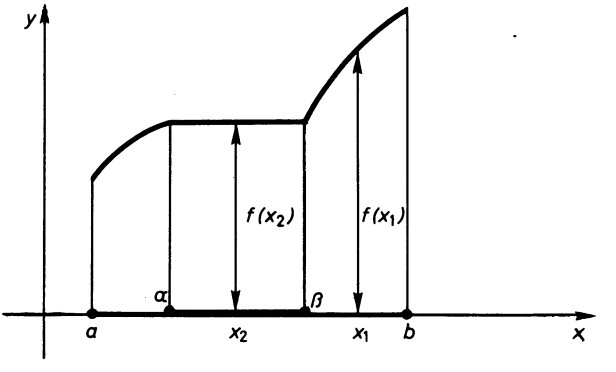


Fig. 4.58

Como vemos, puede ser constante en algún subintervalo $[\alpha, \beta]$.

Se dice que una función $y = f(x)$ es *monótona decreciente* en un intervalo $[a, b]$ cuando $x_1, x_2 \in [a, b]$ y $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

La gráfica será del tipo de la de la figura 4.59.

En este caso es constante en los subintervalos $[\alpha, \beta]$ y $[\gamma, \delta]$.

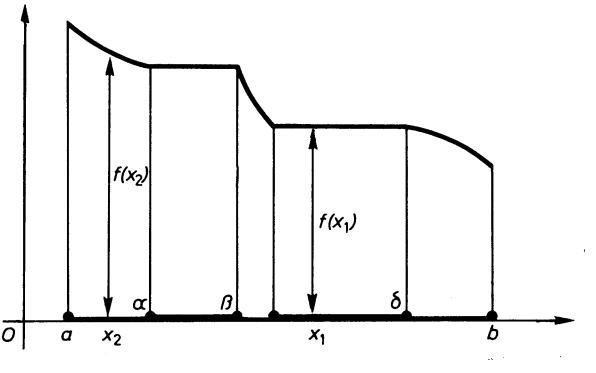


Fig. 4.59

Se dice que una función $y = f(x)$ es *estrictamente creciente* en un intervalo $[a, b]$ cuando $x_1, x_2 \in [a, b]$ y $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, es decir, cuando es monótona creciente y *no* existen subintervalos en los que la función es constante.

La gráfica será del tipo

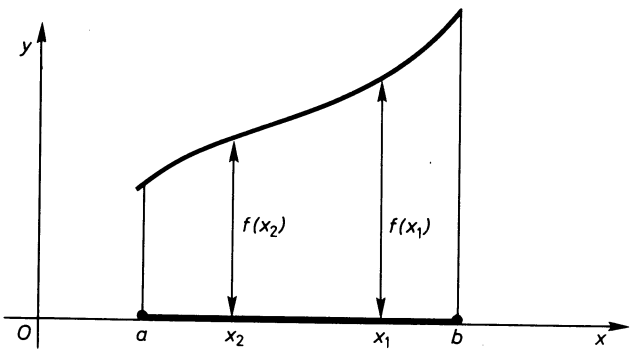


Fig. 4.60

Se dice que una función $y = f(x)$ es *estrictamente decreciente* en un intervalo $[a, b]$ cuando $x_1, x_2 \in [a, b]$ y $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, es decir, cuando es monótona decreciente y *no* existen subintervalos en ella y la función es constante.

La gráfica será del tipo

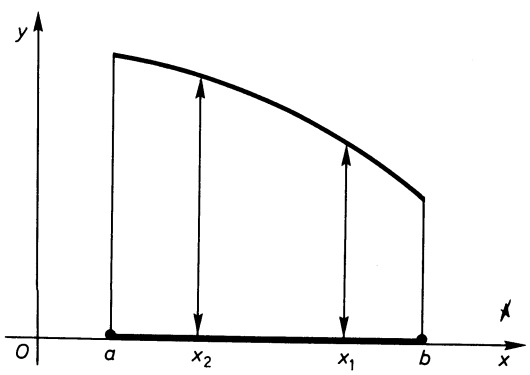


Fig. 4.61

Las funciones monótonas y las estrictamente monótonas que acabamos de definir no tienen por qué tener sus gráficas de trazado continuo como hemos dibujado, sino que pueden presentar «saltos» como en las gráficas siguientes:

Función monótona creciente con un «salto» en el punto *C*.

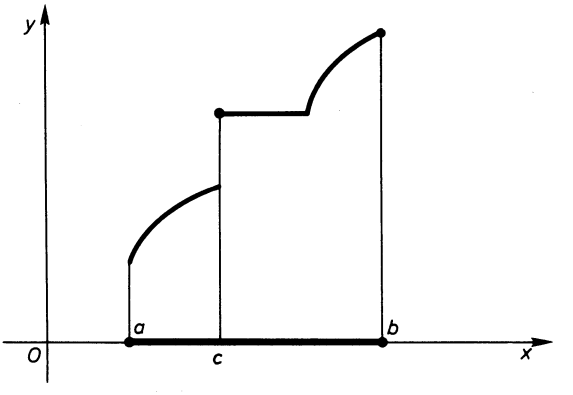


Fig. 4.62

Función decreciente en sentido estricto, con un «salto» en el punto *C*.

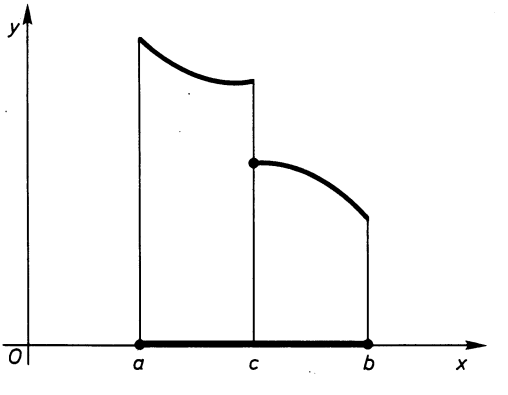


Fig. 4.63

4.59. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

4.590.
¿Es una función $y = \dfrac{x-1}{x^2-1}$? ¿Por qué? ¿Cuál es su dominio?

4.591.
Determínense el dominio y el recorrido de la función compuesta sen (Lx).

4.592.
Fíjense el dominio y el recorrido de $\operatorname{tg} x^2$.

4.593.
¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función $\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)$?

4.594.
Determínense el dominio y el recorrido de $L(x^2 - 1)$.

4.595.
Fíjense el dominio y el recorrido de la función e^{x^2}.

4.596.
Determínense las ramas y el punto de ramificación de la función multiforme, inversa de

$$y = e^{x^2}$$

4.597.
El mismo ejercicio anterior, con la función $y = x^2$.

4.598.
Demuéstrese que las funciones monótonas en sentido estricto son funciones unívocas.

4.599.
Descompónganse en producto de funciones

$$y = \operatorname{sen} x^2; \qquad y = \operatorname{sen}^2 x; \qquad y = 3x^2 + 1; \qquad y = (2x + 1)^6$$

4.6

Límites de funciones

4.601. Introducción

4.602. Concepto vulgar de límite

4.603. Definición de límite de una función

4.6031. *Definición* 1
4.6032. *Definición* 2
4.6033. *Definición* 3
4.6034. *Definición* 4
4.6035. *Unificación de las definiciones anteriores*

4.604. Límites por la derecha y por la izquierda

4.605. Propiedades de límites

4.606. Operaciones con límites

4.6061. *Adición*
4.6062. *Multiplicación*

4.607. Límite de $1/f(x)$ en función del límite de $f(x)$

4.608. Límite de un cociente de funciones

4.609. Infinitésimos

4.6091. *Establecimiento*
4.6092. *Orden de infinitésimos*
4.6093. *Parte principal de un infinitésimo*
4.6094. *Infinitésimos equivalentes*

4.610. Cálculo de algunos límites (exponencial y logarítmica)

4.611. Límites indeterminados

4.612. Estudio de algunos infinitésimos

4.613. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.6

Límites de funciones

4.601. Introducción

En este capítulo se comienza dando una idea del proceso de razonamiento que ha conducido a establecer la definición matemática de límite de una función.

Una vez establecida la definición de límite en todos los casos posibles, se unifican todas las formas.

Dentro del capítulo se incluyen las operaciones con límites que tienen interés. En particular, se habla de infinitésimos y finalmente se tratan los casos de indeterminación.

El apartado siguiente puede suprimirse en primera lectura.

4.602. Concepto vulgar de límite

Vamos a hacer unas consideraciones sobre el concepto de límite antes de establecer la definición matemática.

Decimos que una función $y = f(x)$ tiene por límite el número A cuando la variable x tiende al valor a, si se obtienen puntos de la función muy próximos a A, cuando los valores de la variable lo están de a.

Si se representan en la recta los números A y $f(x)$, puede ocurrir que no exista ningún $f(x)$ dentro del intervalo $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, en cuyo caso no parece lógico decir que $f(x)$ tiene por límite A. Más lógico parecería que $f(x)$ tiene un límite $A - \varepsilon$ o $A + \varepsilon$, según que consideremos los valores de $f(x)$ que sean menores que $A - \varepsilon$ o que sean mayores que $A + \varepsilon$, respectivamente.

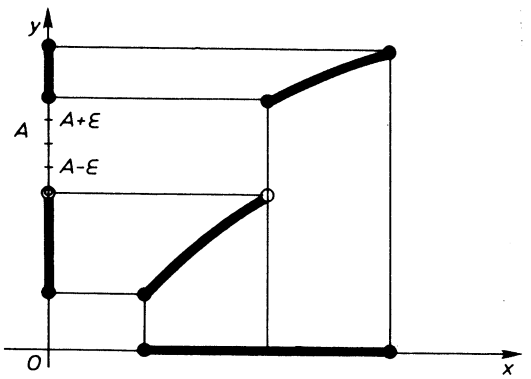


Fig. 4.64

Es más lógico, porque los primeros están más cerca de $A - \varepsilon$ que de A; y los segundos están más cerca de $A + \varepsilon$ que de A. Y este razonamiento es válido para cualquier valor de ε.

Si decimos que el límite de $f(x)$ es A parece razonable exigir que existan valores de la función que difieran de A en menos de cualquier valor ε, lo cual equivale a que *A sea punto adherente del recorrido de $f(x)$*.

Cuando nos referimos al límite de la función $f(x)$ decimos «para x tendiendo a a». Hablando en el sentido del lenguaje ordinario, podemos decir que x es la causa y $f(x)$ es el efecto, ya que el valor de $f(x)$ viene determinado por x. Si decimos «para x tendiendo a a», entendemos que los valores de $f(x)$ se obtienen tales que difieran de A en menos de cualquier valor ε, pero *siempre que* los valores de la x estén suficientemente próximos a a.

Considérese la función, cuya gráfica es

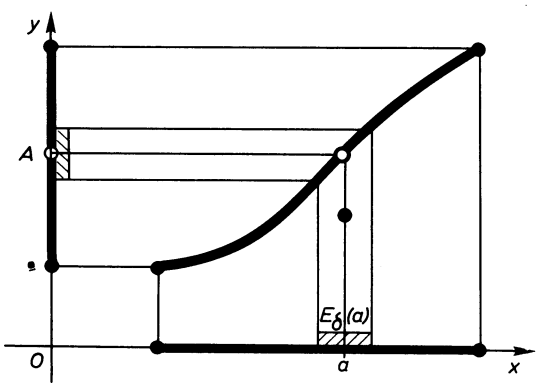


Fig. 4.65

Sepárese del dominio de definición el pequeño entorno $E_\delta(a)$. Entonces, A no es el límite de $f(x)$, aunque es punto adherente del recorrido de la función considerando el dominio total, pues deja de serlo al excluir $f(E_\delta(a) - \{a\})$. ¿Qué quiere

decir esto? Que para que A sea límite de $f(x)$ *es esencial considerar los valores de la función en las proximidades de* a; por eso decimos «para x tendiendo a a».

Considérese ahora la función $f(x)$, cuya gráfica es

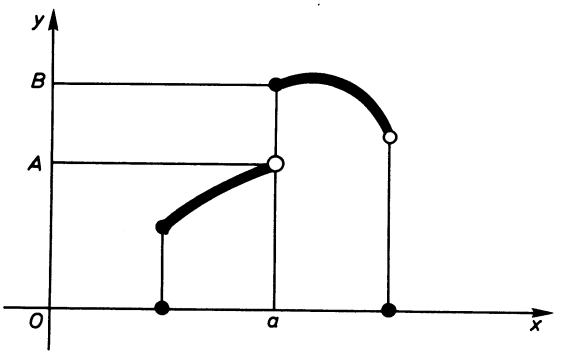


Fig. 4.66

Los puntos A y B son puntos adherentes del recorrido de $f(x)$, y los dos podrían ser límites. Ahora bien: si decimos que el límite es A, resulta que los puntos x a la derecha de a y muy próximos a a son tales que $f(x)$ difiere de A en más valor que $B - A$, y está en contradicción con lo que hemos indicado. Análogamente ocurre con B.

Hemos dicho que parece lógico exigir que intervengan los valores de la función en las proximidades de a; ahora vemos que es conveniente añadir algo más: «*todos*» *los valores de la función en entornos suficientemente pequeños de* a.

De esta manera se excluyen casos como la función

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{para } x = \text{número racional} \\ f(x) = 2 & \text{para } x = \text{número irracional} \end{cases}$$

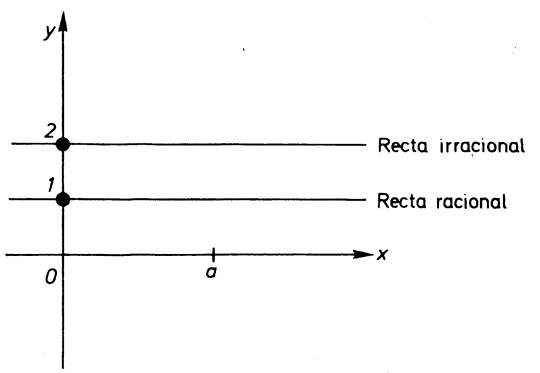


Fig. 4.67

en que se pueden encontrar números tan próximos a a como se desee, que difieran muy poco (en este caso cero) de 1 y 2, ya que se encontrarán números racionales e irracionales en cualquier entorno de a.

Para excluir estos posibles «fallos» se llegó a la definición matemática de límite que parece, según el proceso que hemos intentado esbozar, la más perfecta.

4.603. Definición de límite de una función

4.6031. *Definición* 1

Decimos que A es el límite de la función $f(x)$ para x tendiendo a a, y lo representaremos por $\lim_{x \to a} f(x) = A$, si fijado un $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera existe otro número $\delta > 0$ tal que $f(x)$ difiera de A, en valor absoluto en menos de ε, siempre que x difiera de a en menos de δ, excluyendo el valor $x = a$.

Simbólicamente se puede escribir

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

El valor $\varepsilon > 0$ se fija a voluntad, pero el valor $\delta > 0$ viene condicionado por el ε.

Debe advertirse que el valor δ no es único, pues si vale un valor δ_1 también vale cualquiera menor que δ_1.

La definición que acabamos de dar puede interpretarse gráficamente diciendo que la gráfica de la función estará dentro de la banda definida por las paralelas al eje x a las distancias $A - \varepsilon$ y $A + \varepsilon$ *siempre que* los valores considerados de la variable x estén dentro del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ excluido el punto a que puede ser tal que $f(a)$ esté fuera (e incluso no definido).

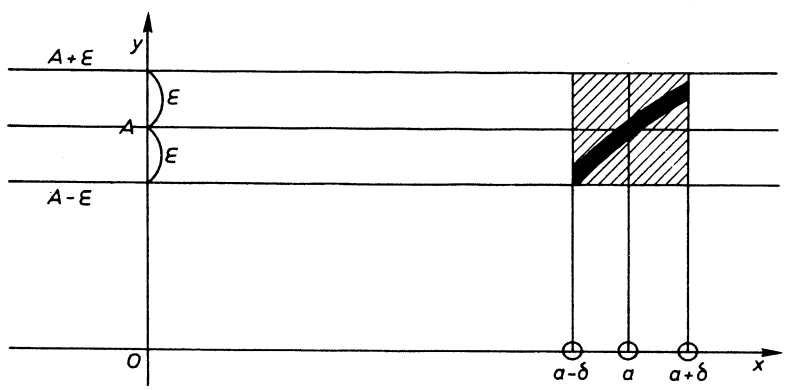


Fig. 4.68

Es decir, que la gráfica estará dentro del rectángulo rayado al que ha de cortar en los lados verticales. Y esto para todo ε y el δ correspondiente.

Ejemplo de límite haciendo uso de la definición

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen} x - 0| < \varepsilon$$

Es decir, que fijado el valor $\varepsilon > 0$ arbitrario se ha de encontrar un valor $\delta > 0$ que venga determinado por el ε, tal que $|\text{sen } x| < \varepsilon$ para $0 < |x| < \delta$.

Como $|\text{sen } x| < |x|$ basta con que $|x| < \varepsilon$ para que se verifique $|\text{sen } x| < \varepsilon$ que es lo que buscamos, es decir que

$$0 < |x| < \varepsilon \Rightarrow |\text{sen } x| < \varepsilon;$$

luego podemos tomar $\delta = \varepsilon$

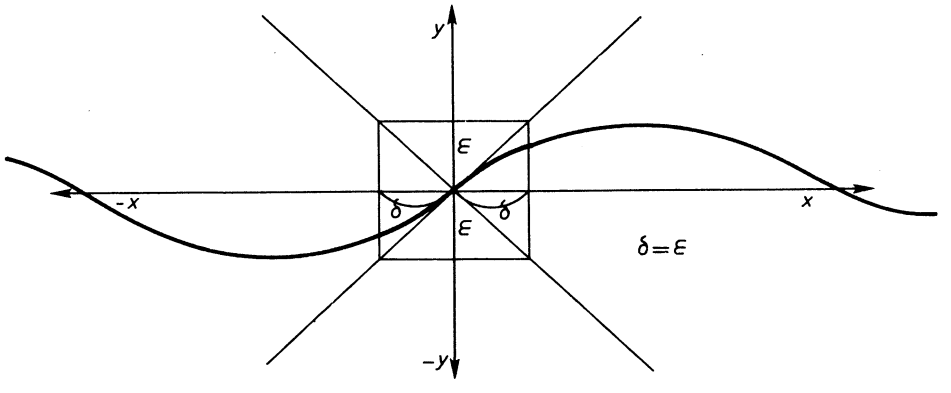


Fig. 4.69

4.6032. *Definición* 2

Se dice que la función $f(x)$ tiende a infinito para x tendiendo a a, y se representa $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, cuando para cualquier número $N > 0$, tan grande como se quiera, es posible determinar un $\delta > 0$ tal que $|f(x)| > N$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0,\ \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > N$$

La interpretación geométrica dice que dentro de la parte rayada ha de encontrarse la gráfica de la función, y cortar en los lados paralelos al eje y, de los rectángulos de altura infinita (véase Fig. 4.70).

Esto se verifica para cualquier N y su correspondiente δ.

Ejemplo de límite infinito haciendo uso de la definición

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1} = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0,\ \exists \delta > 0 / 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x - 1}\right| > N$$

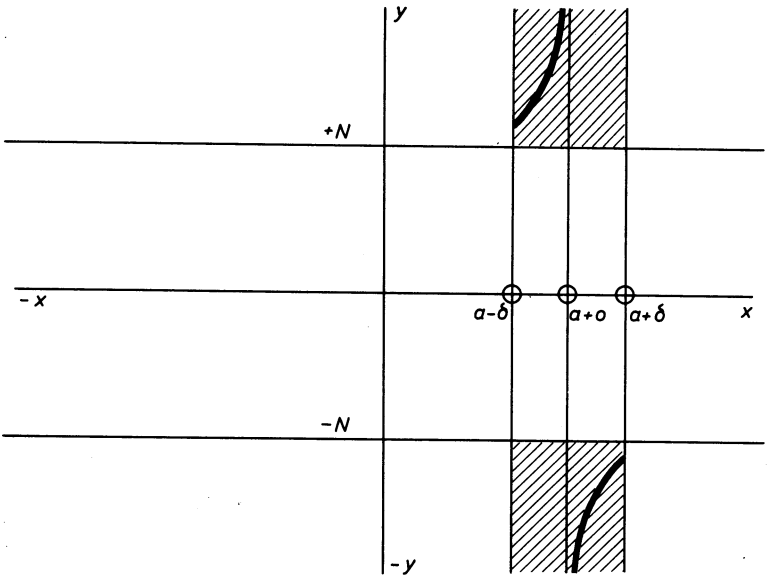


Fig. 4.70

Es decir, que hemos de demostrar que fijado un valor $N > 0$ arbitrario se puede hallar un valor δ, que viene condicionado por N, tal que siempre que $0 < |x - 1| < \delta$ se verifique $\left|\frac{1}{x-1}\right| > N$.

Pero

$$\left|\frac{1}{x-1}\right| = \frac{1}{|x-1|} > N \quad \text{si} \quad |x-1| < \frac{1}{N},$$

es decir, que

$$0 < |x-1| < \frac{1}{N} \Rightarrow \left|\frac{1}{x-1}\right| < N$$

luego podemos tomar como valor

$$\delta = \frac{1}{N}.$$

La representación gráfica es la de la figura 4.71.

4.6033. *Definición* 3

Se dice que la función $f(x)$ tiene por límite A, para x tendiendo a infinito y se representa por $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ cuando para cualquier $\varepsilon > 0$ es posible determinar un $M > 0$ tal que $|f(x) - A| < \varepsilon$ para $|x| > M$.

Simbólicamente:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0 / |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

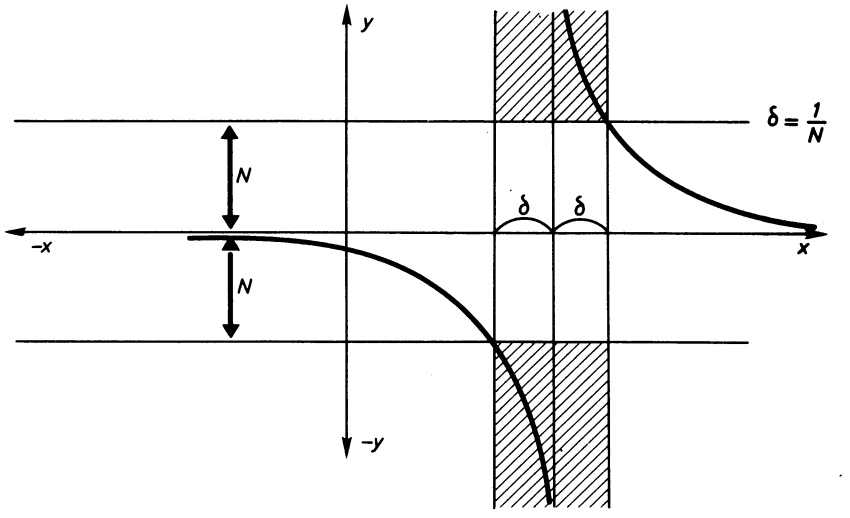


Fig. 4.71

Como consecuencia de esta definición la gráfica de la función estará dentro de la zona infinita rayada, y cortará en los lados verticales. (Véase Fig. 4.72.)

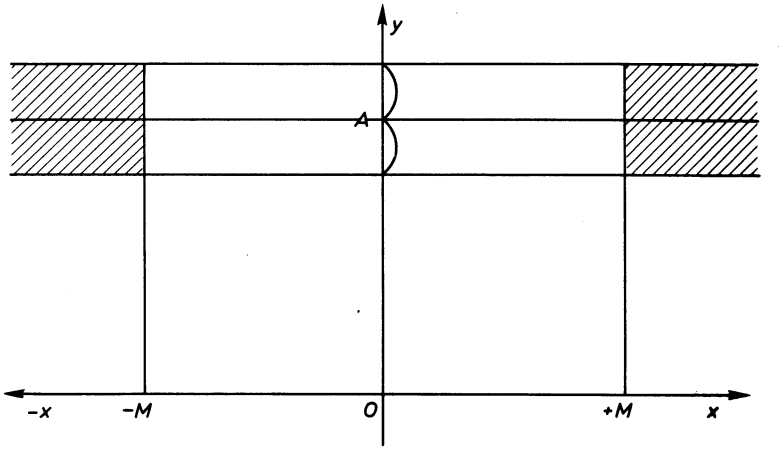


Fig. 4.72

Esto se verifica para cualquier ε y su correspondiente M.

Ejemplo de límite para la variable tendiendo a infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0/|x| > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

Es decir, para cualquier ε que fijemos ha de encontrarse un $M > 0$, condicionado por el ε, tal que

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad |x| > M$$

Si $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ resultará que $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, luego $|x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, luego podemos tomar $M = \frac{1}{\varepsilon}$. (Fig. 4.73.)

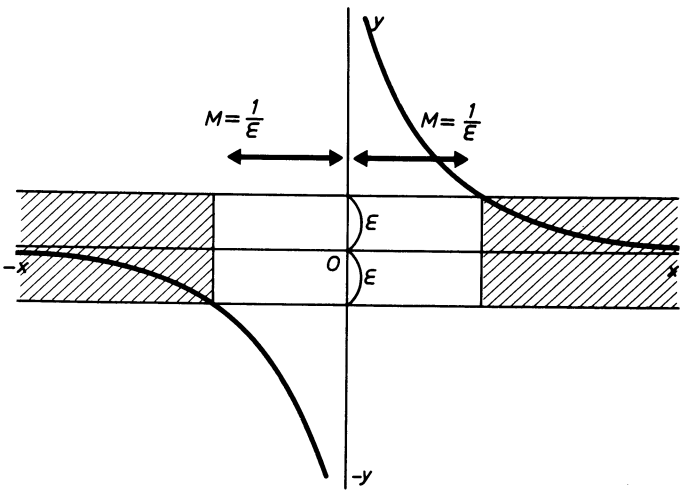


Fig. 4.73

4.6034. *Definición* 4

Se dice que la función $f(x)$ tiene por límite infinito para la variable x tendiendo a infinito, y se representa $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ cuando para todo $N > 0$ arbitrario encontramos un $M > 0$ tal que $|f(x)| > N$ siempre que $|x| > M$.

Simbólicamente:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0,\ \exists M > 0 / |x| > M \Rightarrow |f(x)| > N$$

La interpretación geométrica nos dice que la gráfica de la función estará dentro de los cuadrantes rayados; y esto para cualquier N y su correspondiente M (ver Fig. 4.74).

Ejemplo de límite infinito para la variable tendiendo a infinito

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0,\ \exists M > 0 / |x| > M \Rightarrow |x^2| > N$$

Es decir, que para cualquier valor N fijado hemos de encontrar un M, condicionado por el N tal que siempre que $|x| > M$ se verifique $|x^2| > N$

$$|x^2| > N \text{ si } |x| > \sqrt{N}$$

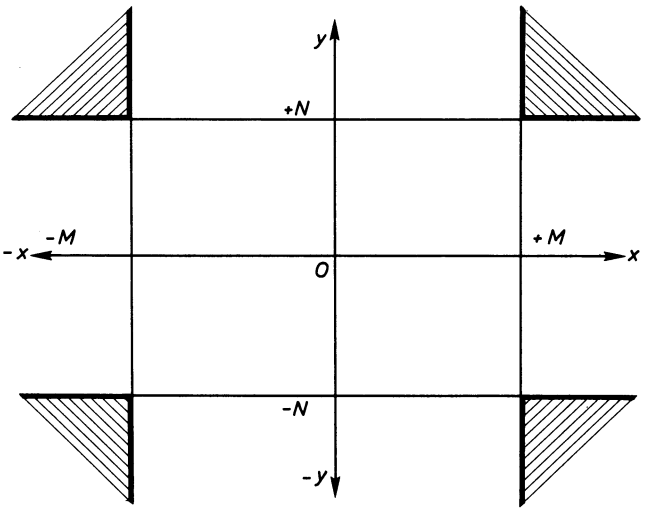


Fig. 4.74

o sea verifica

$$|x| > \sqrt{N} \Rightarrow |x^2| > N$$

luego podemos tomar

$$M = \sqrt{N}$$

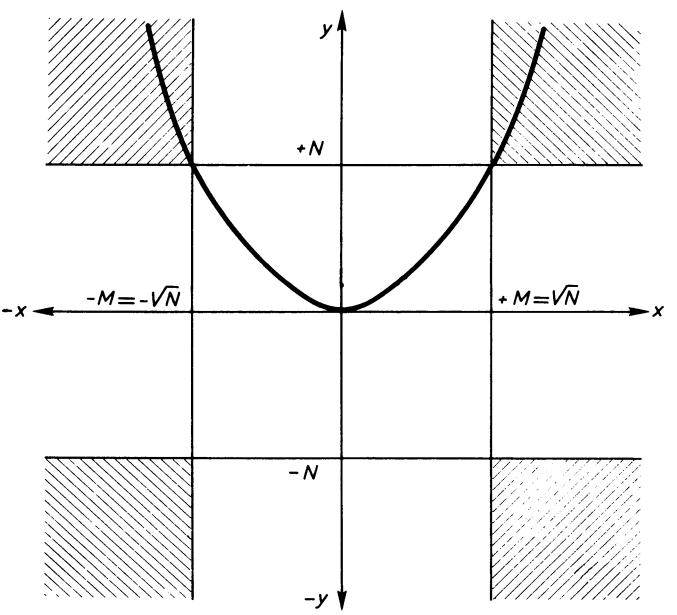


Fig. 4.75

4.6035. *Unificación de las definiciones anteriores*

Las cuatro definiciones anteriores de límite parece que no tienen mucha relación entre sí. No obstante pueden reunirse en una definición única, según vamos a ver.

Consideremos la recta real *completada*, es decir, añadiendo un punto al que llamaremos punto del infinito. Y aunque tal punto, que representaremos por ∞, no es la imagen de un número real será muy ventajosa su introducción en el estudio de límites.

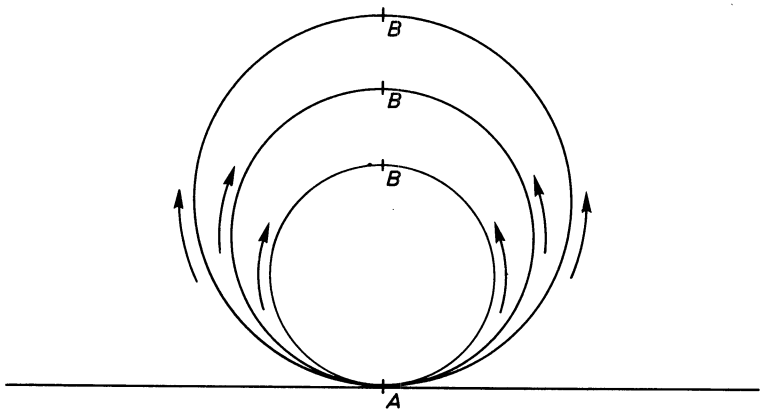


Fig. 4.76

Si partimos de un punto A de una circunferencia podemos llegar al punto B (véase la Fig. 4.76) por cualquiera de los caminos a derecha e izquierda. La recta puede considerarse como el caso límite de la circunferencia cuando el radio aumenta indefinidamente. El punto equivalente del punto B, en el caso límite, será el punto del infinito de la recta. Es decir, que existe un único punto del infinito tanto si partimos de A hacia la derecha como si lo hacemos hacia la izquierda. Cuando representamos $+\infty$ o $-\infty$ indicamos simplemente que es el punto infinito alcanzado siguiendo el sentido positivo o negativo, pero es el mismo punto. Esto se comprende mejor al estudiar la recta proyectiva, pero por ahora es suficiente con esta somera explicación.

Recordemos [Fig. 4.77, *a*)] que se llama entorno de un punto a a cualquier conjunto $E_\varepsilon(a) = \{x \| |x - a| < \varepsilon\}$.

Ampliamos, de una manera lógica, esta definición al punto del infinito.

Definición. Se llama entorno del punto ∞ a cualquier conjunto $E_N(\infty) = \{x \| |x| > N\}$. (Fig. 4.77, *b*.)

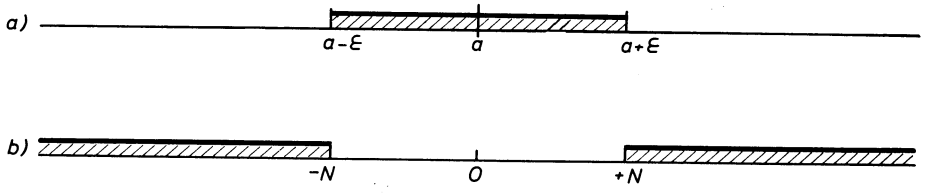


Fig. 4.77

Con esto podemos unificar las cuatro definiciones de límites.

1) $\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(A)\exists E_\delta(a)/x \in E_\delta(a) - \{a\} \Rightarrow f(x) \in E_\varepsilon(A)$.
2) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E_N(\infty)\ \exists E_\delta(a)/x \in E_\delta(a) - \{a\} \Rightarrow f(x) \in E_N(\infty)$.
3) $\lim_{x\to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(A)\ \exists E_M(\infty)/x \in E_M(\infty) - \{\infty\} \Rightarrow f(x) \in E_\varepsilon(A)$.
4) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E_N(\infty)\ \exists E_M(\infty)/x \in E_M(\infty) - \{\infty\} \Rightarrow f(x) \in E_N(\infty)$.

Adviértase que como ∞ no representa ningún número real no puede pertenecer al dominio de la función, luego deberíamos escribir $E_M(\infty)$ en vez de $E_M(\infty) - \{\infty\}$ en las definiciones 3) y 4). Lo hemos escrito así puesto que no hay ninguna contradicción en ello y ganamos en uniformidad, ya que la definición de límite se reduce a la 1) teniendo en cuenta que a y A pueden ser cualquier punto de la recta completada. Puede escribirse también así

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(A)\ \exists E_\delta(a)/f(E_\delta(a) - \{a\}) \subset E_\varepsilon(A)$$
$$a, A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \text{recta complementada}$$

4.604. Límites por la derecha y por la izquierda

La definición de límite es

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0/0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0/x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Es decir, que para cualquier x del intervalo $(a - \delta, a)$ o bien del intervalo $(a, a + \delta)$ se verifica $|f(x) - A| < \varepsilon$.

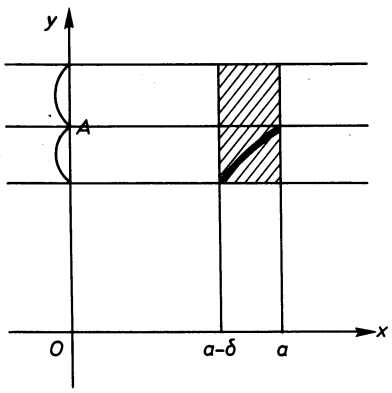
A) Si se impone sólo la condición de que para $x \in (a - \delta, a)$ se verifique

$|f(x) - A| < \varepsilon$, se tiene un concepto más amplio, que es el llamado ***límite a la izquierda***, que representaremos

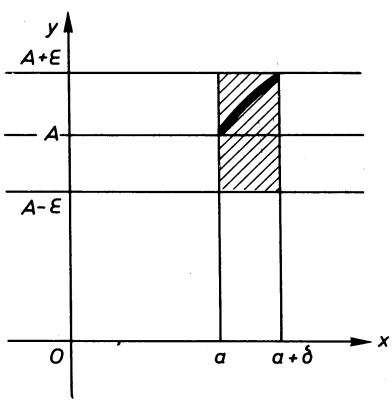
$$\lim_{x \to a-} f(x)$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A \underset{\text{(def)}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

La gráfica de la función estará dentro del rectángulo rayado. (Fig. 4.78 *a*.)



a) límite por la izquierda



b) límite por la derecha

Fig. 4.78

B) Análogamente, si se impone la condición de que para $x \in (a, a + \delta)$ se verifique $|f(x) - A| < \varepsilon$, se obtiene el *límite a la derecha*, que representamos

$$\lim_{x \to a+} f(x)$$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \underset{\text{(def.)}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

La gráfica de la función estará dentro del rectángulo rayado. (Fig. 478, *b.*)

Si una función $f(x)$ tiene límite, $\lim_{x \to a} f(x) = A$, tendrá límite a la derecha y la izquierda y ambos coinciden con el límite ordinario:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = A$$

Todo esto en el supuesto de que la función esté definida a derecha e izquierda del punto a.

Una función puede tener límite a derecha e izquierda y no tener límite ordinario.

Para que tenga límite han de coincidir los límites a derecha e izquierda, o bien no existir alguno de ellos (véase ejemplo 3), a continuación:

Ejemplo 1

$y = E[x]$

$\lim_{x \to 2+} E\,[x] = 2$
$\lim_{x \to 2-} E\,[x] = 1$
$\lim_{x \to 2} E\,[x]$ no existe

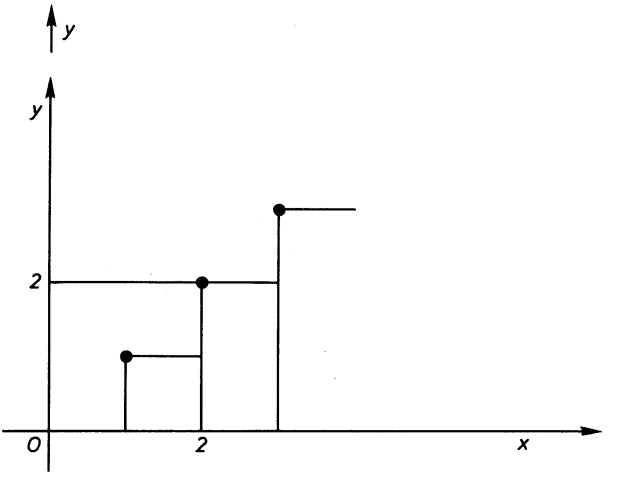


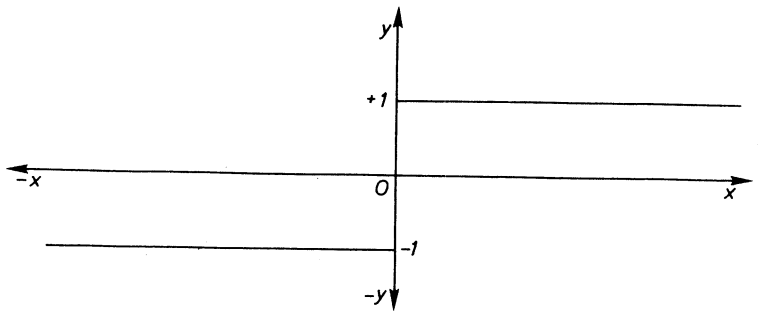
Fig. 4.79

En esta función existen límites por la derecha y por la izquierda, pero al ser distintos no existe límite ordinario.

Lo mismo ocurre con los otros puntos correspondientes a números enteros.

Ejemplo 2

$y = \dfrac{x}{|x|}$ función conocida como *función signo de* x; y se representa también por $y = \operatorname{sig} x$.



$\lim_{x \to 0_+} \operatorname{sig} x = +1$

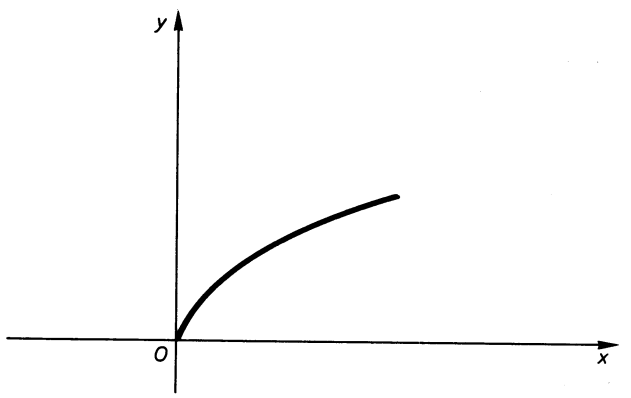
$\lim_{x \to 0_-} \operatorname{sig} x = -1$

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sig} x =$ no existe

Fig. 4.80

Ejemplo 3

$y = \sqrt{x}$



$\lim_{x \to 0_+} \sqrt{x} = 0$

$\lim_{x \to 0_-} \sqrt{x} =$ no existe

$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

Fig. 4.81

La noción equivalente a los límites por la derecha y por la izquierda cuando la variable tiende a ∞, es considerar que x tienda a ∞ por valores positivos o negativos, o sea hacia $+\infty$ o $-\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0 / |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 / x > +M \text{ o } x < -M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Si se considera únicamente $x > +M$, se tendrá el *límite para x tendiendo a* $+\infty$; si $x < -M$ se tiene el *límite para x teniendo a* $-\infty$.

O sea:

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0 / x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

y la gráfica estará dentro de la parte rayada para cualquier ε y su correspondiente M. (Fig. 4.82.)

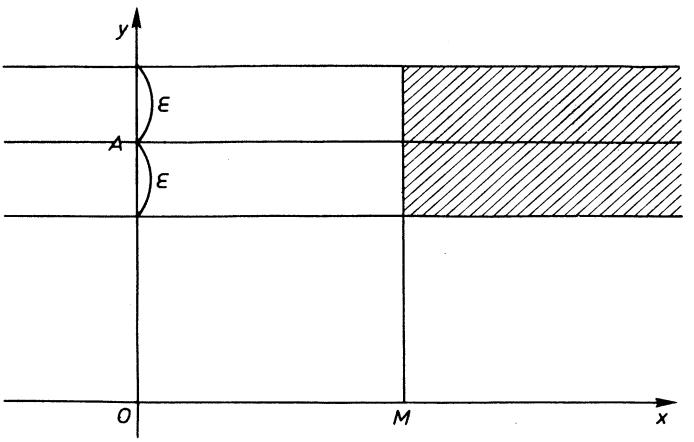


Fig. 4.82

2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0 / x < -M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

y la gráfica está dentro de la parte rayada. (Fig. 4.83.)

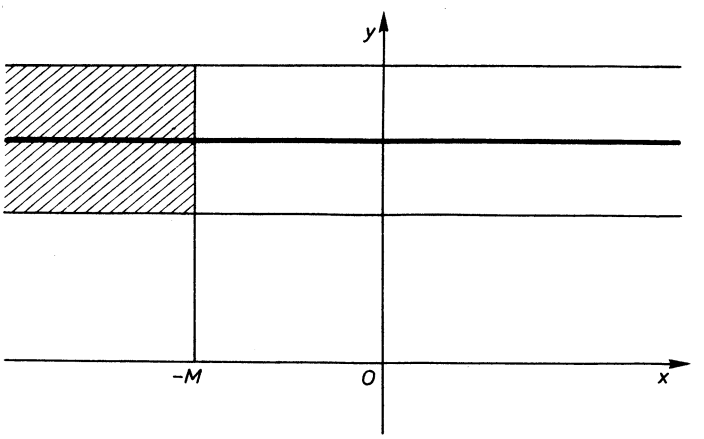


Fig. 4.83

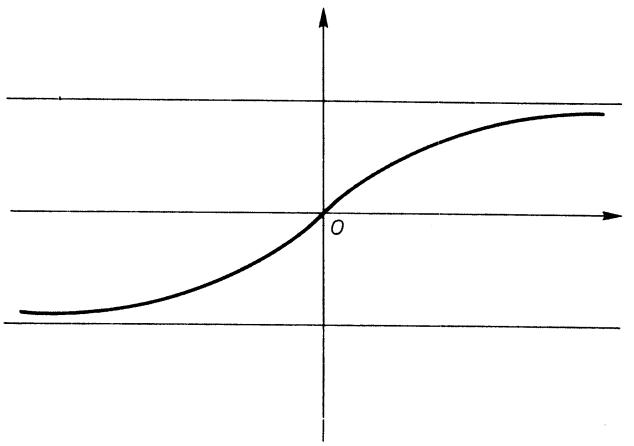
Si existe solamente uno de los límites (a derecha o izquierda), como en el ejemplo 3 anterior, este límite coincide con el límite ordinario.

Si existen los dos límites, para que exista límite ordinario, han de coincidir.

Análogamente se definiría $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

(La formulación y gráficas debe realizarlas el lector.)

Ejemplo 1



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = +1$$

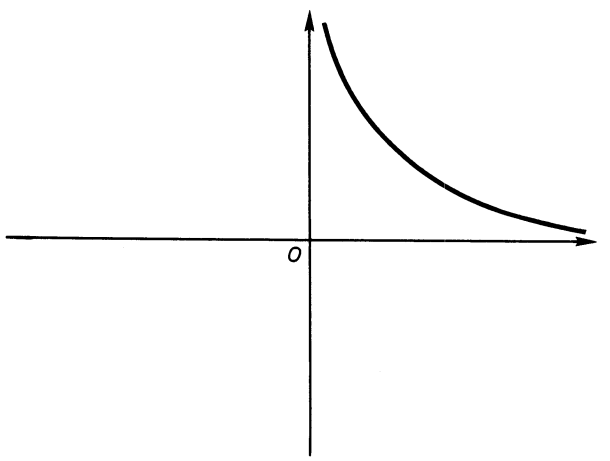
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$$

luego no existe

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Fig. 4.84

Ejemplo 2



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \text{no existe}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Fig. 4.85

Ejemplo 3

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

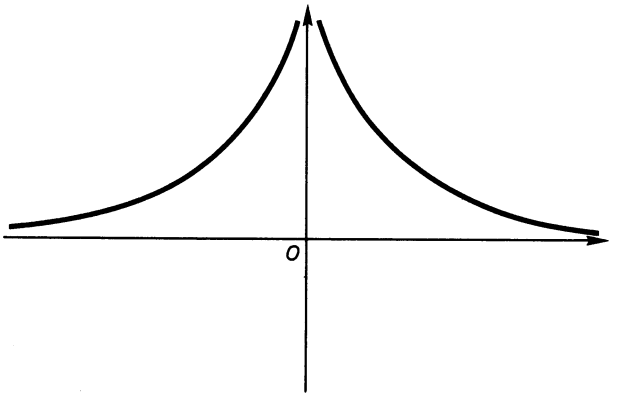


Fig. 4.86

4.605. Propiedades de límites

I. El límite es único.
Supongamos que existieran dos límites:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = B \end{array}\right\} A \neq B \text{ y supongamos también que } A > B$$

Elegimos $\varepsilon > 0$, de forma que

$$\varepsilon < \frac{A - B}{2}$$

Los entornos $E_\varepsilon(A)$ y $E_\varepsilon(B)$ son disjuntos.

Para ε existe un δ_1, tal que

$$f(E_{\delta_1}(a) - \{a\}) \subset E_\varepsilon(A)$$

y también un δ_2, tal que

$$f(E_{\delta 2}(a) - \{a\} \subset E_\varepsilon(B)$$

Si $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$ resultará que

$$f(E_\delta(a) - \{a\}) \subset E_\varepsilon(A) \cap E_\varepsilon(B) = \phi$$

que es una contradicción.

II. El límite de una constante es la misma constante en cualquier punto en que la función esté definida.

$\lim_{x \to a} K = K$, pues para todo x se verifica $|f(x) - K| = |K - K| = 0 < \varepsilon$, es decir,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - K| < \varepsilon$$

para cualquier δ y cualquier ε.

III. Si $\lim_{x \to a} f(x) = A$ existe $K > 0$ tal que $|f(x)| < K$ para un cierto entorno $0 < |x - a| < \delta_1$.

Basta observar la figura

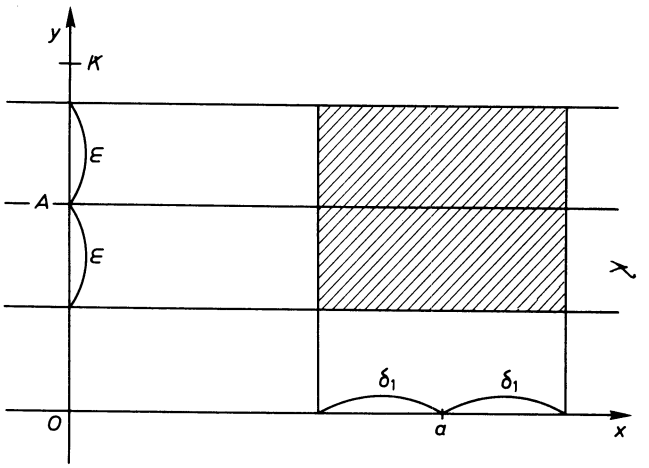


Fig. 4.87

Es suficiente tomar $K > |A| + \varepsilon$. Esta proposición nos dice que $f(x)$ está acotada en un cierto entorno de a.

IV. Si $\lim_{x \to a} f(x) = A \neq 0$, $f(x)$ tiene el mismo signo de A en un cierto entorno de a (excluido el a como siempre).

Véase gráficamente

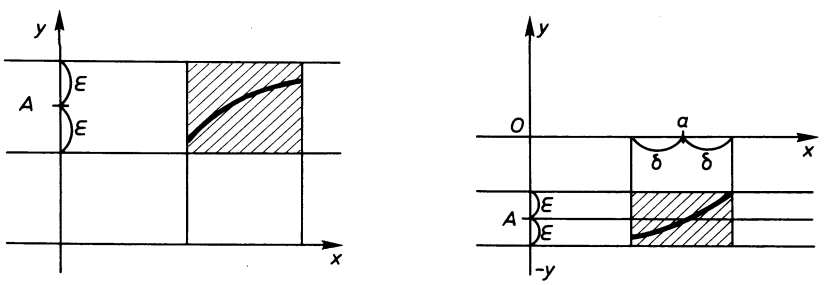


Fig. 4.88

4.606. Operaciones con límites

En todo lo que sigue trataremos sólo límites para $x \to a$, teniendo en cuenta que todo es válido para $x \to \infty$.

4.6061. *Adición*

El límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites siempre que existan, o sea:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

1) Supongamos que ambos límites son finitos

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon/2$$
$$\text{para cualquier } (\varepsilon, \delta_1)$$
$$\lim_{x \to a} g(x) = B \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon/2$$
$$\text{para cualquier } (\varepsilon, \delta_2)$$

Es decir: fijado ε, obtenemos δ_1, δ_2 y por lo tanto $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$ y se verificará:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (A + B)| = |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq$$
$$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

es decir,

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B, \qquad \text{c.q.d.}$$

2) Admitamos que un límite es finito y el otro infinito

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 / 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

O sea

$$\boxed{A - \varepsilon < f(x)} < A + \varepsilon \qquad [1]$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta_2 / 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow \boxed{|g(x)| > M} \qquad [2]$$

Dados ε y M se obtienen δ_1 y δ_2, respectivamente; por lo tanto también se consigue $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$ y se verificará, después de sumar [1] y [2] (lo cual es lícito siempre que $0 < |x - a| < \delta$),

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) + |g(x)| > A - \varepsilon + M = N \qquad [3]$$

siendo N un número arbitrariamente grande, puesto que M lo es.

El proceso que seguimos es el siguiente:

ε arbitrario, determina δ_1
N arbitrario, determina $M = N - A + \varepsilon$, que a su vez determina δ_2
δ = mínimo $\{\delta_1, \delta_2\}$

O sea, a partir de N arbitrariamente grande se ha obtenido el δ, luego según [3]

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \infty, \qquad \text{c.q.d.}$$

NOTA. Si el signo del límite de $g(x)$ es fijo, la suma también lo tendrá, en cuyo caso no habríamos trabajado con $|g(x)|$.

3) Supóngase que los dos límites sean infinitos, pero del mismo signo, pues si dos funciones tienden a ∞ con signo contrario, el límite de su suma es un indeterminado del tipo $\infty - \infty$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists \delta_1 / 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > M \qquad [1]$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0 \; \exists \delta_2 / 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > N \qquad [2]$$

luego para δ = mín $\{\delta_1, \delta_2\}$ se verificará [1] y [2];
sumando $f(x) + g(x) > M + N$;
es decir,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > M + N = H$$

El proceso a seguir para obtener δ a partir de un H prefijado es:

— se fija $H > 0$, tan grande como se quiera,
— se descompone H en dos sumandos, $H = M + N$,
— M determina δ_1,
— N determina δ_2,

a partir de δ_1 y δ_2 se obtiene δ = mín $\{\delta_1, \delta_2\}$;
luego

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = +\infty, \qquad \text{c.q.d.}$$

Análogamente se demuestra

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = -\infty$$

4.6062. *Multiplicación*

El límite de un producto de funciones es igual al producto de los límites de las funciones, siempre que existan. Hay un caso de indeterminación, cuando una

función tiende a infinito y la otra a 0; es decir, es una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

$$\lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = (\lim_{x \to a} f(x))(\lim_{x \to a} g(x))$$

1) Supongamos que los dos límites sean finitos

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad ; \quad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

Hemos de demostrar que

$$\lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = AB$$

o sea que

$$|f(x)\, g(x) - AB| < \varepsilon \quad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \delta,$$

es decir, que para todo ε se puede encontrar un δ tal, que se verifica lo anterior. Veamos:

$$|f(x)\, g(x) - AB| = |f(x)\, g(x) - A\, g(x) + A\, g(x) - AB| =$$
$$= |(f(x) - A)\, g(x) + A(g(x) - B)| \leq |f(x) - A||g(x)| + |A||g(x) - B|$$

Resultará que se verifica

[1] $|g(x)| < K$ para $0 < |x - a| < \delta_1$ por la proposición III del apartado 6.

[2] $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$ para $0 < |x - a| < \delta_2$ pues $\lim_{x \to a} f(x) = A$, y, por la definición de límite, para $\dfrac{\varepsilon}{2K}$ tendremos un δ_2 que verifica lo anterior.

[3] $|g(x) - B| < \dfrac{\varepsilon}{2|A|}$ para $0 < |x - a| < \delta_3$, pues $\lim_{x \to a} g(x) = B$ y a $\dfrac{\varepsilon}{2|A|}$ corresponde un δ_3.

Si $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1 \delta_2 \delta_3\}$ resultará que para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta$ se verifica [1], [2] y [3] y por lo tanto

$$|f(x)\, g(x) - AB| \leq |f(x) - a|\, |g(x)| + |A|\, |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2K} K + |A| \frac{\varepsilon}{2|A|} = \varepsilon$$

Es decir, $\lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = AB$, c.q.d.

2) Supongamos que un límite es finito y el otro infinito

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \neq 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

Hemos de demostrar que $\lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = \infty$, o sea que

$$\forall H > 0\ \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)\, g(x)| > H$$

Se verifica

[1] $|f(x)| > K$, siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$, por la proposición IV del 4.605.

[2] $|g(x)| > N$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_2$, pues $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, por hipótesis.

Si $\delta = \text{mín}\ \{\delta_1, \delta_2\}$, se verifica [1] y [2], siempre que $0 < |x - a| < \delta$; luego, multiplicando miembro a miembro,

$$|f(x)|\ |g(x)| > KN$$

y resulta

$$|f(x)\, g(x)| = |f(x)|\ |g(x)| > KN = H$$

El proceso a seguir para obtener δ a partir de H es el siguiente:

— se fija H arbitrariamente grande,
— se establece K que verifique [1]. A este K corresponde un cierto δ_1,
— se determina $N = \dfrac{H}{K}$,
— para el valor N anterior se obtiene un δ_2,
— el valor $\delta = \text{mín}\ \{\delta_1, \delta_2\}$ es el que corresponde al H determinado.

Es decir, a partir de H hemos obtenido δ, c.q.d.

3) Supongamos que ambos límites son infinitos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta_1 / 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| > M$$
$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta_2 / 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)| > N$$

Si $\delta = \text{mín}\ \{\delta_1, \delta_2\}$, se verificará, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, que $|f(x)| > M$ y $|g(x)| > N$, y por tanto $|f(x)\, g(x)| = |f(x)|\ |g\ (x)| > MN$.

Hemos de demostrar que $\lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = \infty$; o sea que

$$\forall H > 0,\ \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)\, g(x)| > H$$

Proceso a seguir para obtener δ, a partir del H prefijado:

— se fija H,
— se descompone H en producto de dos factores $H = MN$,
— a partir de M se obtiene δ_1, puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$,
— a partir de N se consigue δ_2, por la misma razón,
— $\delta = \text{mín}\ \{\delta_1, \delta_2\}$ es el que vale.

Corolario. $\lim_{x \to a} K\, f(x) = K \lim_{x \to a} f(x)$

$\lim_{x \to a} (-f(x)) = -\lim_{x \to a} f(x)$ (caso anterior para $K = -1$)

4.607. Límite de $1/f(x)$ en función del límite de $f(x)$

1) $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}$.

Hemos de demostrar que $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A}\right| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$; es decir, fijado ε, encontrar δ.

Se verifica $|f(x)| > K$ para $0 < |x - a| < \delta_1$ en virtud de la proposición IV del 4.605, luego

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{K}$$

y se puede decir

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|A - f(x)|}{|f(x)|\,|A|} < \frac{|A - f(x)|}{K|A|},$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$.

Si se consigue que $|A - f(x)| < \varepsilon\, K|A|$, resultará que

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A}\right| < \frac{K \cdot |A| \cdot \varepsilon}{K \cdot |A|} = \varepsilon.$$

Ahora bien: $|A - f(x)| < K \cdot |A| \cdot \varepsilon$ por la definición de límite, siempre que $0 < |x - a| < \delta_2$ (δ_2 es un valor condicionado por $K \cdot |A| \cdot \varepsilon$).

Para conseguir que

$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A}\right| < \varepsilon$ ha de verificarse $0 < |x - a| < \delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$.

Encontrado el δ se concluye la demostración.

2) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} > M$,

pero $\frac{1}{|f(x)|} > M$ equivale a que $|f(x)| < \frac{1}{M}$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, resultará que para $\varepsilon = \frac{1}{M}$ tendremos un δ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{M}.$$

Este es el que buscamos.

3) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$

$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon,$

pero $\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$ equivale a $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, resulta que para $M = \frac{1}{\varepsilon}$ se obtendría un δ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Este δ es el que nos vale para la demostración del aserto.

4.608. Límite de un cociente de funciones

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right)$$

Por tanto, basta aplicar los resultados de los apartados 4.6062 y 4.607, y se tienen los siguientes casos:

1.º) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a} f(x) = A \\ \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

2.º) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a} f(x) = A \neq 0 \\ \lim_{x\to a} g(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

3.º) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a} f(x) = \infty \\ \lim_{x\to a} g(x) = B \neq \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

4.º) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a} f(x) = A \neq \infty \\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Existen dos casos de indeterminación para el cociente, que corresponden al caso en que ambas funciones tienen por límite 0, o ambas tienen por límite infinito.

Son indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

4.609. Infinitésimos

4.6091. *Establecimiento*

Una función $f(x)$ se dice que es un infinitésimo en el punto $x = a$, si se verifica $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Los infinitésimos más sencillos en $x = a$ son $(x - a), (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n, \ldots$

Si $a = 0$, se transforman en $x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$

Una función $f(x)$ se dice que es un infinitésimo en ∞ si se verifica $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Los infinitésimos más sencillos en ∞ son $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots, \frac{1}{x^n}, \cdots$

Si $f(x)$ es un infinitésimo en $x = a$ resulta que $f(x + a)$ es un infinitésimo en $x = 0$.

Si $f(x)$ es un infinitésimo en ∞ sucede que $f\left(\frac{1}{x}\right)$ es un infinitésimo en $x = 0$.

Es decir, que el estudio de los infinitésimos en cualquier punto, incluido el ∞, se reduce al estudio de los infinitésimos en el origen.

Los infinitésimos-tipo, que hemos descrito, van a servir para establecer criterios de comparación con otros infinitésimos.

4.6092. *Orden de infinitésimos*

La comparación de infinitésimos origina el concepto de *orden*.

Sea $f(x)$ un infinitésimo en $x = 0$. Decimos que $f(x)$ es *de orden n* si

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = K \neq 0$$

Análogamente, si $f(x)$ es un infinitésimo para $x = a$ o para ∞, diremos que es *de orden n* si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = K_1 \neq 0 \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \to \infty} x^n f(x) = K_2 \neq 0,$$

respectivamente.

Al decir que $f(x)$, infinitésimo en $x = 0$, es de orden n, ha de entenderse que $f(x)$ tiende a 0 del mismo modo que x^n, es decir que la diferencia entre $f(x)$ y x^n en las proximidades de cero es despreciable.

Cuanto mayor sea el orden de un infinitésimo, más rápidamente tiende a cero.

Las funciones $x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ que hemos tomado como infinitésimos de comparación tienen las gráficas siguientes. (Ver Fig. 4.89.)

Puede observarse que para valores de x próximos a cero, cuanto mayor sea n, x^n es más pequeño. (Ver Fig. 4.90.)

Si

$$x = \frac{1}{10}, \frac{1}{10} > \frac{1}{10^2} > \frac{1}{10^3} > \cdots > \frac{1}{10^n} > \cdots$$

Para valores de x distantes del origen, por ejemplo, para $x = 2$, no ocurre así, pues $2 < 2^2 < 2^3 < \cdots < 2^n < \cdots$

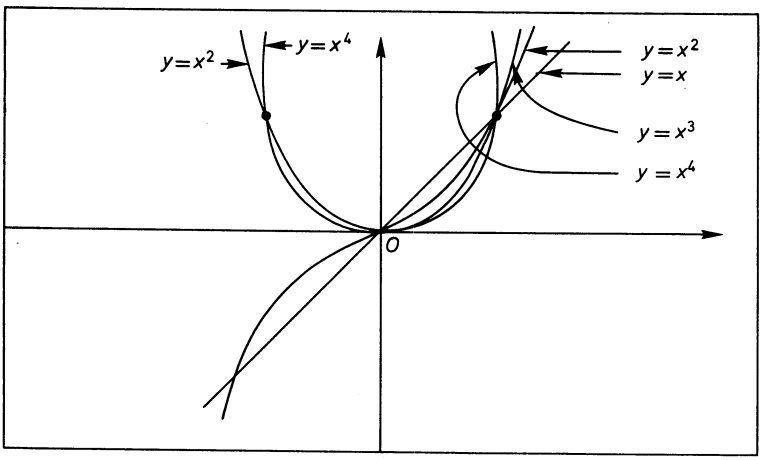


Fig. 4.89

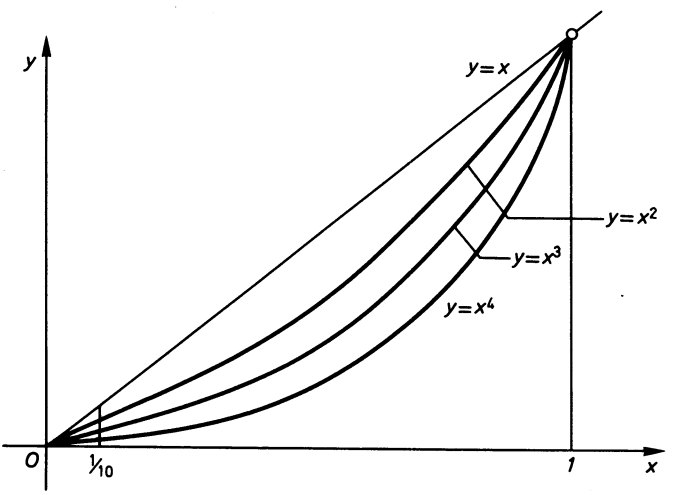


Fig. 4.90

4.6093. *Parte principal de un infinitésimo*

Supóngase que $f(x)$ es un infinitésimo de orden n, es decir, que existe una constante $K \neq 0$ tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = K;$$

se llama *parte principal* del infinitésimo $f(x)$, al infinitésimo Kx^n.

Vamos a justificar esta denominación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = K \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x)}{x^n} - K \right) = 0;$$

luego, si se llama $\alpha(x) = \dfrac{f(x)}{x^n} - K$, resulta que $\alpha(x)$ es un infinitésimo en $x = 0$, y $f(x) = Kx^n + \alpha(x)x^n$.

Obsérvese que $f(x)$ se compone de dos sumandos Kx^n y $\alpha(x)x^n$, de los cuales el más importante es Kx^n, pues, aunque ambos sean infinitésimos en $x = 0$, el primero vale más, ya que es el producto de x^n por una constante K, mientras el segundo es el producto de x^n por otro infinitésimo, $\alpha(x)$.

Es decir, que para puntos muy próximos a cero el sumando $\alpha(x)x^n$ es *despreciable* comparado con el sumando Kx^n, razón por la cual a Kx^n se le llama *parte principal* de $f(x)$.

Ejemplo

Sea la función polinómica $f(x) = 2x^2 - 3x^3 + 4x^5$. Podemos escribirla en la forma

$$f(x) = 2x^2 + x^2(-3x + 4x^3) = Kx^2 + x^2 \cdot \alpha(x).$$

En este caso

$$K = 2,\ n = 2,\ \alpha(x) = -3x + 4x^3$$

luego la parte principal es $2x^2$.

¿Qué quiere decir?: que para valores de x muy próximos a cero, por ejemplo $x = \dfrac{1}{10^6}$, el sumando que «vale algo» es el primero, o sea $2x^2$.

$$f(x) = 2x^2 - 3x^3 + 4x^5 \qquad f\left(\frac{1}{10^6}\right) = \frac{2}{10^{12}} - \frac{3}{10^{18}} + \frac{4}{10^{30}} \simeq \frac{2}{10^{12}}$$

Si bien el sumando $\dfrac{2}{10^{12}}$ es muy pequeño, dos billonésimas, los sumandos $\dfrac{3}{10^{18}}$ y $\dfrac{4}{10^{30}}$ son despreciables (tres trillonésimas y cuatro pentallonésimas, respectivamente) frente a él.

En general, la parte principal de una función polinómica es el monomio de menor grado.

4.6094. *Infinitésimos equivalentes*

Hemos visto que a efectos de estudiar los valores de $f(x)$ en $x = 0$ se puede sustituir $f(x)$ por su parte principal, Kx^n, ya que el otro sumando es despreciable.

Está claro que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{Kx^n} = 1$$

Esto sugiere la definición siguiente:

Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, se dice que son equivalentes si

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Consecuencia: La condición necesaria y suficiente para que dos infinitésimos sean equivalentes es que tengan la misma parte principal.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{Kx^n} = 1 \wedge \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{f(x)}{Kx^n}}{\dfrac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{Kx^n} = 1$$

luego Kx^n es la parte principal de $g(x)$, c.q.d.

Ejercicio

Basándose en la teoría del presente capítulo, demostrar:

a) La suma de un número finito de infinitésimos también lo es.
b) El producto de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo.
c) El producto de una función de límite finito por un infinitésimo es un infinitésimo.

4.610. Cálculo de algunos límites (exponencial y logarítmica)

De la definición y propiedades de límite resulta que

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a} (f(x) - A) = 0;$$

luego para demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = A$, basta con demostrar que $f(x) - A$ es un infinitésimo, y recíprocamente.

Basándose en esto, se procede a calcular los límites de las funciones logarítmicas y exponenciales.

Admitimos que *a*) $b^{f(x)} - 1$ y *b*) $\log_b (1 + f(x))$ son infinitésimos en los mismos puntos que sea la función $f(x)$; esto se demuestra en el número 4.612. Se ve de una manera intuitiva que, si $f(x) \to 0$, también lo hacen las funciones anteriores.

1) Si $b > 0$ y $\lim_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^A}$

En efecto, basta con demostrar que $\lim_{x\to a}(b^{f(x)} - b^A) = 0$, o sea

$$\lim_{x\to a} b^A(b^{f(x)-A} - 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a}(b^{f(x)-A} - 1) = 0$$

que es evidente, pues $f(x) - A$ es infinitésimo y basta aplicar *a*).

2) Si $\lim_{x\to a} f(x) = A > 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} \log_b f(x) = \log_b A}$

En efecto, es suficiente demostrar que

$$\lim_{x\to a}(\log_b f(x) - \log_b A) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \log_b \left(1 + \frac{f(x) - A}{A}\right) = 0,$$

lo cual es evidente, pues $\dfrac{f(x) - A}{A}$ es infinitésimo en $x = a$ y basta aplicar *b*).

3) Si $\lim_{x\to a} f(x) = A > 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = B$ se verifica que

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = A^B}$$

En efecto, se verifica $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)Lf(x)}$, luego

$$\lim (f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)Lf(x)} \underset{\text{por 1}}{=} e^{\lim_{x\to a} g(x)Lf(x)} \underset{\text{por 2}}{=} e^{BLA} = A^B, \quad \text{c.q.d.}$$

En este caso de exponencial se presentan tres tipos de indeterminados:

$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = 0$, de la forma 0^0
$\lim_{x\to a} f(x) = 1 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, de la forma 1^∞
$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = 0$, de la forma ∞^0

Como $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)Lf(x)}$, corresponden a los tres casos que pueden dar lugar al indeterminado $0 \cdot \infty$ del producto $g(x)Lf(x)$.

Ejercicios

Demuéstrese

1) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty;\ b > 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} b^{f(x)} = +\infty$
2) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty;\ b > 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} b^{f(x)} = 0$
3) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty;\ b < 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} b^{f(x)} = 0$

4) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty;\ b < 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} b^{f(x)} = +\infty$

5) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty;\ b > 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} \log_b f(x) = +\infty$

6) $\lim_{x\to a} f(x) = 0;\quad b > 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} \log_b f(x) = -\infty$

4.611. Límites indeterminados

Podemos resumir los casos de indeterminación que se presentan al operar con límites y que hemos visto en los apartados anteriores.

Adición: $\infty - \infty$

Multiplicación: $0 \cdot \infty$

División: $\frac{0}{0}$, o bien $\frac{\infty}{\infty}$

Exponenciación: 0^0, 1^∞, ∞^0

Vamos a ver, *abusando* del símbolo ∞, que los siete casos se reducen al indeterminado $\frac{0}{0}$.

Téngase muy presente que esto es un esquema de la demostración que efectuaríamos, sustituyendo los símbolos por las funciones que los tienen como límite.

a) $\infty - \infty = \infty\left(\frac{\infty}{\infty} - 1\right) = \infty\,(1 - 1) = \infty \cdot 0 = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

b) $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

c) $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

d) $0^0 = e^{0L0} = e^{0\cdot\infty} = e^{\frac{0}{\frac{1}{\infty}}} = e^{\frac{0}{0}}$

e) $1^\infty = e^{\infty L1} = e^{0\cdot\infty} = e^{\frac{0}{\frac{1}{\infty}}} = e^{\frac{0}{0}}$

f) $\infty^0 = e^{0\cdot L\,\infty} = e^{0\cdot\infty} = e^{\frac{0}{\frac{1}{\infty}}} = e^{\frac{0}{0}}$

Los límites indeterminados de cada uno de los siete tipos antes descritos y que se reducen al tipo 0/0, pueden existir o no existir.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = A$, y $\lim_{x\to a} g(x) = B$, se verifica que $\lim_{x\to a} (f(x)\,g(x)) = AB$ *cualesquiera que sean las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$, con tal de que sus límites sean A y B, respectivamente.

Sin embargo si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ nada podemos asegurar sobre el valor de $\lim_{x\to a} (f(x)\, g(x))$ que pueda ser cualquiera e incluso no existir, lo cual dependerá del tipo de funciones particulares.

A) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ $\quad \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \operatorname{sen} x\right) = 1$

B) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ $\quad \lim_{x\to 0} \operatorname{tg}^3 x = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{tg}^3 x\right) = 0$

C) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2} = \infty$ $\quad \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2x^2} \cdot x^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$ *no existe*

Es decir, que el límite indeterminado del tipo $0 \cdot \infty$ tendrá distinto valor o incluso no existirá, según el par de funciones-factores.

En este sentido hay que interpretar la indeterminación: en que *no se puede afirmar nada «a priori»*.

La siguiente proposición sirve para resolver muchos casos de límites indeterminados.

Proposición. A efectos de hallar el límite puede sustituirse un infinitésimo, que esté multiplicando o dividiendo, por otro equivalente.

O sea:

$$\lim_{x\to a} F(x)f(x) = \lim_{x\to a} F(x)f_1(x)$$

siempre que

$$f(x) \text{ y } f_1(x) \text{ sean infinitésimos equivalentes en } x = a$$

o sea

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{f_1(x)} = 1$$

En efecto,

$$\lim_{x\to a} F(x)f(x) = \lim_{x\to a} \left(F(x)f_1(x)\frac{f(x)}{f_1(x)}\right) = \lim_{x\to a} F(x)f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{f_1(x)} = \lim_{x\to a} F(x)f_1(x).$$

Demuéstrese como *ejercicio* que si $\lim_{x\to a} f(x) = A$, resulta

$$\lim_{x\to a} F(x)f(x) = \lim_{x\to a} (F(x) \cdot A)$$

Ejemplos de aplicación

1.º) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \operatorname{tg}^5 2x}{(1-\cos x)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \operatorname{tg}^5 2x}{\left(2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot (2x)^5}{\left(2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2^5 \cdot x^8}{\frac{1}{2^4} \cdot x^8} = 2^9$

2.º) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - 4x^3}{1 - \cos 2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - 4x^3}{2\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{2x^2} = \dfrac{3}{2}$

3.º) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos^3 x \operatorname{tg}^2 5x \cdot 4x}{2x^3 + 5x^4} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1 \cdot 25x^2 \cdot 4x}{2x^3} = 50$

Para resolver otros casos de indeterminación se requiere hablar de los desarrollos en serie y la regla de L'Hôpital, que es posterior a la derivación.

4.612. Estudio de algunos infinitésimos

a) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ (se vio como ejemplo en el número 4.6031)

b) $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) = 0$

$1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$, luego $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) = \lim_{x\to 0} \left(2\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}\right) \underset{\text{I}}{=}$

$$\underset{\text{I}}{=} 2 \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \underset{\text{II}}{=} 2\left(\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^2 \underset{\text{III}}{=} 2 \cdot 0 = 0$$

I y II porque el límite de un producto es igual al producto de los límites. III por el apartado *a*).

c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \underset{\text{I}}{=} \frac{\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x}{\lim_{x\to 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

I porque el límite de un cociente es igual al cociente de los límites; y $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ en virtud de *b*), pues $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} (\cos x - 1) = 0$.

d) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} (b^{f(x)} - 1) = 0$

En efecto, $\lim_{x\to a} (b^{f(x)} - 1) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |b^{f(x)} - 1| < \varepsilon$, pero $|b^{f(x)} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < b^{f(x)} < 1 + \varepsilon$.

Hemos de encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 1 - \varepsilon < b^{f(x)} < 1 + \varepsilon$$

Vamos a considerar dos casos según que sea $b > 1$ o $b < 1$.

I) Si $b > 1$ se verifica que

$$-\frac{1}{n} < f(x) < \frac{1}{n} \Rightarrow b^{-1/n} < b^{f(x)} < b^{1/n}$$

toda vez que si $b > 1$ la función b^x es monótona creciente en sentido estricto. (Se supone un conocimiento, al menos elemental, de la función exponencial y la forma de las gráficas, que hemos esquematizado (Fig. 4.91).)

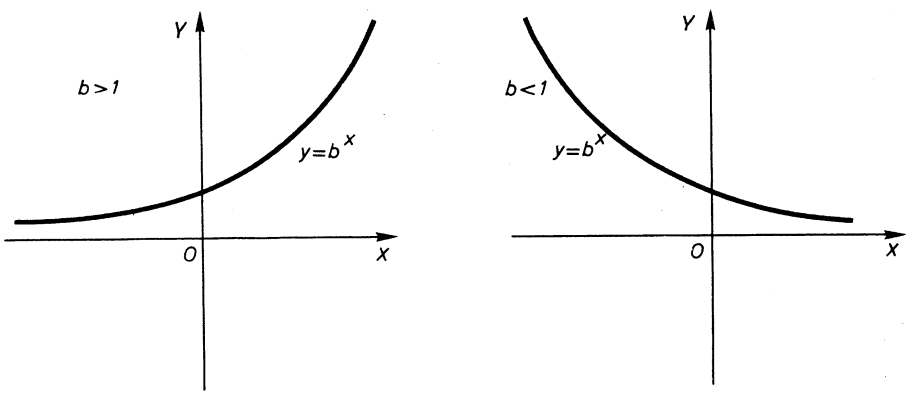


Fig. 4.91

Lo anterior se verifica para cualquier número natural n.
Dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un n tal que

$$1 + \varepsilon > b^{1/n} \quad \text{y} \quad 1 - \varepsilon < b^{-1/n};$$

la segunda condición se deduce de la primera, pues $1 - \varepsilon^2 < 1$, o sea

$$(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon) < 1 \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} < \frac{1}{b^{1/n}} = b^{-1/n}$$

Basta, pues, demostrar que $1 + \varepsilon > b^{1/n}$, o lo que es igual $(1 + \varepsilon)^n > b$.

Por la fórmula del binomio de Newton será

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n > 1 + n\varepsilon$$

y basta obligar a que $1 + n\varepsilon > b$, lo cual se verifica siempre que $n > \dfrac{b - 1}{\varepsilon}$.

Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, existe un δ_1 tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{n}$$

o lo que es igual

$$-\frac{1}{n} < f(x) < \frac{1}{n} \Rightarrow b^{-1/n} < b^{f(x)} < b^{1/n}$$

y, además,

$$1 - \varepsilon < b^{-1/n} < b^{f(x)} < b^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

puesto que el n se ha determinado con esa condición.

Resumiendo: $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow 1 - \varepsilon < b^{f(x)} < 1 + \varepsilon$, c.q.d.

II) Si $b < 1$, se verifica que

$$\frac{1}{n} < f(x) < \frac{1}{n} \Rightarrow b^{-1/n} < b^{f(x)} < b^{1/n}$$

puesto que si $b < 1$ la función b^x es monótona decreciente en sentido estricto.

Voy a suponer $b = \frac{1}{a}$, y sustituirlo en los extremos de la doble desigualdad

$$\frac{1}{a^{-1/n}} > b^{f(x)} > \frac{1}{a^{1/n}}$$

o sea

$$a^{-1/n} < b^{f(x)} < a^{1/n}, \; a > 1.$$

Por el mismo razonamiento que en el caso anterior (puesto que $a > 1$) para un

$$n > \frac{a - 1}{\varepsilon}$$

se verifica

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n} < b^{f(x)} < a^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

o sea

$$1 - \varepsilon < b^{f(x)} < 1 + \varepsilon$$

siempre que $-\frac{1}{n} < f(x) < \frac{1}{n}$, lo cual se verifica para $0 < |x - a| < \delta_1$ en virtud de la hipótesis $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Así se incluye la demostración en todos los casos.

e) $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \log_b(1 + f(x)) = 0$

$\lim_{x \to a} \log_b(1 + f(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\log_b(1 + f(x))| < \varepsilon.$

Pero $|\log_b(1 + f(x))| < \varepsilon$ equivale a $-\varepsilon < \log_b(1 + f(x)) < \varepsilon$, o sea

$$\boxed{\log_b b^{-\varepsilon} < \log_b(1 + f(x)) < \log_b b^{\varepsilon}}$$

que es lo que hemos de demostrar. Pueden ocurrir dos casos:

I) Si $b > 1$ la función logarítmica es estrictamente creciente

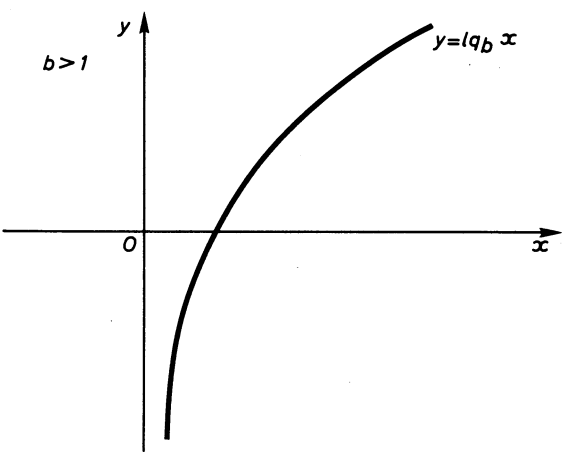


Fig. 4.92

luego el recuadro equivale a

$$b^{-\varepsilon} < 1 + f(x) < b^{\varepsilon}$$

o sea

$$b^{-\varepsilon} - 1 < f(x) < b^{\varepsilon} - 1$$

Si $b > 1$, dijimos que b^x es monótona creciente estrictamente, por lo tanto

$$0 < b^{-\varepsilon} < 1 = b^0 < b^{\varepsilon},$$

luego

$$1 - b^{-\varepsilon} > 0,$$

y como $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, será

$$|f(x)| < 1 - b^{-\varepsilon} \Leftrightarrow -(1 - b^{-\varepsilon}) < f(x) < 1 - b^{-\varepsilon}$$

en un cierto entorno $0 < |x - a| < \delta$.

Pero $1 - b^{-\varepsilon} < b^{\varepsilon} - 1$, según vamos a ver, luego

$$b^{-\varepsilon} - 1 < f(x) < b^{\varepsilon} - 1, \qquad \text{c.q.d.}$$

Veamos que $1 - b^{-\varepsilon} < b^{\varepsilon} - 1$

$$0 < (b^{\varepsilon} - 1)^2 = b^{2\varepsilon} - 2b^{\varepsilon} + 1$$

Multiplicando ambos miembros por $b^{-\varepsilon} > 0$

$$0 < b^{\varepsilon} - 2 + b^{-\varepsilon} = (b^{\varepsilon} - 1) - (1 - b^{-\varepsilon}), \qquad \text{c.q.d.}$$

II) Si $b < 1$, la función logarítmica es estrictamente decreciente (Fig. 4.93),

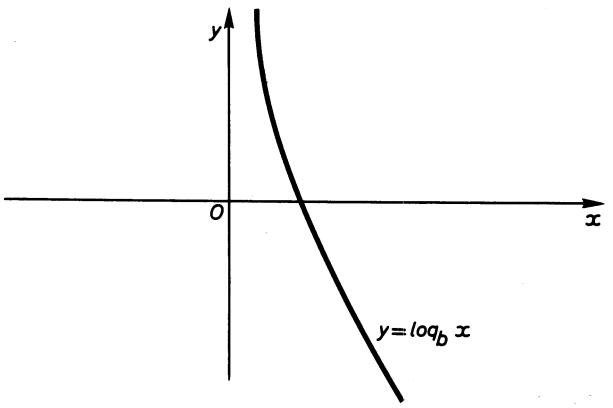


Fig. 4.93

luego el recuadro equivale a

$$b^{-\varepsilon} > 1 + f(x) > b^{\varepsilon}$$

Si hacemos

$$b = \frac{1}{a}, \qquad a > 1$$

queda

$$a^{-\varepsilon} < 1 + f(x) < a^{\varepsilon}$$

y se demuestra exactamente igual que en el caso I), puesto que $a > 1$.

4.613. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.61300.
Demuéstrese, basándose en la definición de límite, que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

4.61301.
Demuéstrese que $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

4.61302.
Demuéstrese que $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$.

4.61303.
Pruébese que $\lim_{x\to 5} \frac{1}{x-5} = \infty$.

4.61304.
Escríbase el significado de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

4.61305.
Escríbase el significado de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4.61306.
Demuéstrese que $\lim_{x\to a} x = a$; $\lim_{x\to a} kx = ka$; $\lim_{x\to a} x^m = a^m$; $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$; $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.

4.61307.
Demuéstrese, basándose en la definición de límite, que dos funciones cuyos valores coinciden en un entorno de un punto, tienen el mismo límite en ese punto.

4.61308.
Basándose en lo anterior, calcúlese el límite de $(x-1)/(x^2-1)$ en el punto $x = 1$.

4.61309.
Demuéstrese la equivalencia $\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a} (f(x) - A) = 0$.

4.61310.
Demuéstrese que el límite de una función en un punto es único.

4.61311.
Demuéstrese que si $f(x)$ está acotada (o sea: $|f(x)| < k$, k fijo) y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, se verifica que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

4.61312.
Demuéstrese que si $f(x)$ es un infinitésimo, también lo es $k \cdot f(x)$, donde k es una constante.

4.61313.
Demuéstrese, basándose en la definición de límite, que $\operatorname{sen} x$ es un infinitésimo en $x = 0$.

4.61314.

Pruébese que tg x también lo es.

4.61315.

Pruébese que $1 - \cos x$ es un infinitésimo.

4.61316.

Demuéstrese, basándose en la definición de límite, que $\lim_{x \to a} (x - a)^n = 0$.

4.61317.

Demuéstrese $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

4.61318.

Demuéstrese $\lim_{x \to 0} x^n = 0$.

4.61319.

Demuéstrese que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0$.

4.61320.

Demuéstrese que si $\lim_{x \to a} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x \to a} \operatorname{sen} f(x) = \operatorname{sen} A$.

4.61321.

Demuéstrese lo mismo para el caso de todas las demás funciones trigonométricas.

4.61322.

Demuéstrese que si $\lim_{x \to a} f(x) = h$, existe un entorno de a en el que $f(x)$ tiene el mismo signo que h.

4.61323.

Hállese el verdadero valor de $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x = 2$; $\frac{2x^3 - x^2}{x^3 - 2x}$ en $x = 0$.

4.61324.

Hállese el orden y la parte principal de los infinitésimos siguientes, en $x = 0$:

$$2x^2 - 3x; \quad 5x^4 - 7x^3; \quad 9x^2 - 6x^5$$

4.61325.

Hállese el orden y la parte principal de los infinitésimos siguientes, en $x = 2$

$$(x - 2)^3 + 4(x - 2)^2; \quad 4(x - 2)^2 - 6(x - 2)$$

4.61326.

Hállese el periodo de la función periódica $x = \cos \omega t$, que representa el movimiento vibratorio armónico.

4.7

Funciones continuas. Puntos de discontinuidad

4.71. Introducción

4.72. Función continua

4.721. *Función continua en un punto; en un intervalo*
4.722. *Propiedades*

4.73. Semicontinuidad por la derecha y por la izquierda

4.74. Puntos de discontinuidad

4.741. *Puntos de discontinuidad evitable*
4.742. *Puntos de discontinuidad de primera especie*
4.743. *Puntos de discontinuidad de segunda especie*

4.75. Propiedades de las funciones continuas

4.76. Ejemplos de continuidad y de discontinuidad

4.77. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.7

Funciones continuas. Puntos de discontinuidad

4.71. INTRODUCCION

En este capítulo se estudia una propiedad muy importante de las funciones, la continuidad. Se desarrollan los teoremas esenciales de las funciones continuas.

Finalmente, se concluye con algunos ejemplos, que se resuelven con detalle para aclarar ideas.

4.72. FUNCION CONTINUA

4.721. Función continua en un punto; en un intervalo

Se dice que una función $y = f(x)$ es continua en el punto $x = a$ si:

1) existe $\lim_{x \to a} f(x)$.
2) la función está definida en $x = a$, o sea: existe el valor $f(a)$, que es lo mismo que decir que a pertenece al dominio de $f(x)$.
3) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, o sea, el valor de la función coincide con el límite.

Las tres condiciones se pueden resumir diciendo que $f(x)$ es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, lo cual implica que: existe $\lim_{x \to a} f(x)$, existe $f(a)$, y ambos valores son iguales.

En el caso de la función continua,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

es decir, no es necesario excluir el punto a.

Se dice que una función es continua en un intervalo cuando lo es en todos sus puntos.

De las operaciones con límites del capítulo anterior se deducen las siguientes:

4.722. Propiedades

1) Una función constante es continua en cualquier punto de su dominio de definición. Es consecuencia de que el límite de una función constante es la misma constante.
2) La suma de funciones continuas es una función continua.
En efecto

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} f(x) = f(a) + g(a), \quad \text{c.q.d.}$$

3) El producto de funciones continuas es una función continua.
En efecto

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)\,g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x)) = f(a)\,g(a), \quad \text{c.q.d.}$$

En particular el producto de una constante por una función continua es una función continua.
4) El cociente de dos funciones continuas es una función continua, excepto en los puntos en que se anula el denominador.
En efecto

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \quad \text{c.q.d.}$$

5) La composición de dos funciones continuas es una función continua

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} F(x) = F(a)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} F(g(x)) = \lim_{z\to g(a)} F(z) = F(g(a))$$

y la conclusión es evidente.

Ejemplos de funciones continuas

1) $y = x$ es continua en toda la recta, pues $\lim\limits_{x\to a} x = a$.
2) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ es continua por ser suma de funciones continuas, pues a_px^p es continua, cualquiera que sea p, ya que a_p es constante y, por tanto, función continua, y $x^p = x \cdot x \ldots x$ (producto de funciones continuas) es continua.

3) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0$; luego $\operatorname{sen} x$ es continua en $x = 0$.

4.73. SEMICONTINUIDAD POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA

Primera definición. Se dice que la función $f(x)$ es *semicontinua por la derecha* en el punto $x = a$, si $\lim_{x \to a_+} f(x) = f(a)$.

La anterior definición implica que existe el límite por la derecha, y que el punto a pertenece al dominio de $f(x)$.

Segunda definición. Se dice que la función $f(x)$ es *semicontinua por la izquierda* en el punto $x = a$ cuando $\lim_{x \to a_-} f(x) = f(a)$.

Como en el caso anterior, la definición supone la existencia de $\lim_{x \to a_-} f(x)$, y la de $f(a)$.

Si una función es continua en un punto se ve que es semicontinua por la derecha y por la izquierda (suponiendo que la función esté definida a ambos lados).

Ejemplo 1

$y = E[x]$ es continua por la derecha en los puntos de abscisa entera. (Fig. 4.94.)

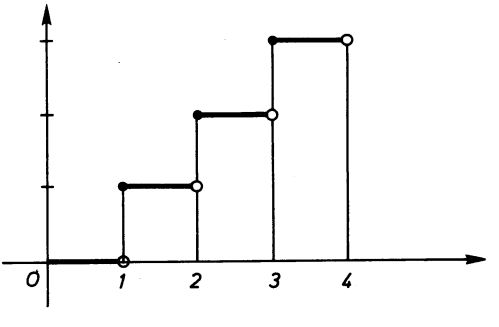
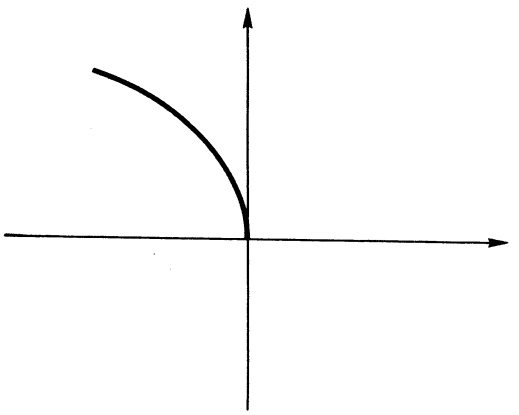


Fig. 4.94

Ejemplo 2

$y = \sqrt{-x}$ es continua por la izquierda en $x = 0$. (Fig. 4.95.)



$$\lim_{x \to 0_-} \sqrt{-x} = \sqrt{-0} = 0$$

Fig. 4.95

4.74. PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

Los puntos en los cuales la función deja de ser continua se llaman puntos de discontinuidad.

Se pueden agrupar en tres clases.

4.741. Puntos de discontinuidad evitable

Se dice que $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable en $x = a$, cuando existe el límite de la función en el punto, pero o bien el punto no pertenece al dominio de la función o bien el valor de la función no coincide con el límite.

Asignando a la función el valor del límite, que se llama *verdadero valor* de la función en el punto, se evita la discontinuidad.

Ejemplo 1

$y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ no está definida en $x = 1$. Sin embargo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3,$$

luego 3 es el verdadero valor de la función en $x = 1$.

Ejemplo 2

$y = x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ no está definida en $x = 0$. Sin embargo,

$$\lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \right) = 0,$$

luego 0 es el verdadero valor en el punto $x = 0$.

Ejemplo 3

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{sen} x & \text{para} \quad x \in [0, \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

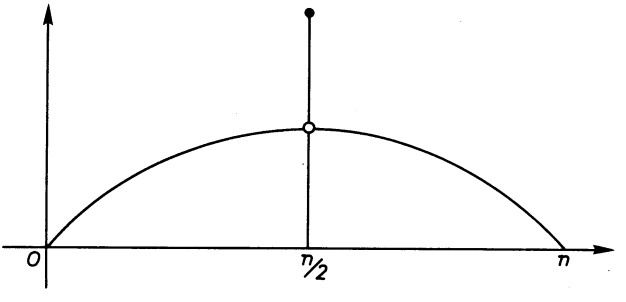


Fig. 4.96

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$, pero $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$, luego el verdadero valor en $x = \dfrac{\pi}{2}$ es 1.

4.742. Puntos de discontinuidad de primera especie

Se dice que $f(x)$ tiene en el punto $x = a$ una discontinuidad de primera especie, cuando existe $\lim_{x \to a_+} f(x)$ y $\lim_{x \to a_-} f(x)$, pero son distintos.

Ejemplo 1

$$y = \frac{x}{|x|} \text{ en } x = 0$$

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{x}{|x|} = +1$$

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{x}{|x|} = -1$$

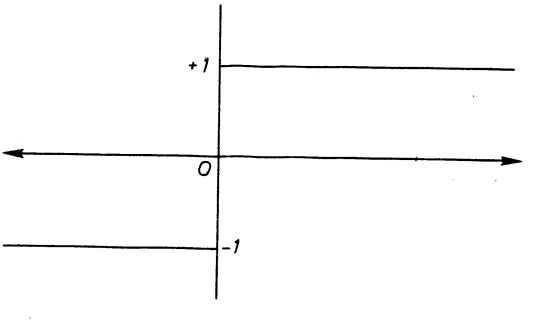


Fig. 4.97

Ejemplo 2

$$y = \frac{+\sqrt{1 - \cos x}}{x} \text{ en } x = 0$$

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{+\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{+\sqrt{2}\,\text{sen}\, x/2}{x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{+\sqrt{2}}{x} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{+\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \lim_{x \to 0_-} \frac{-\sqrt{2}\,\text{sen}\, x/2}{x} = \lim_{x \to 0_-} \frac{-\sqrt{2}}{x}\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

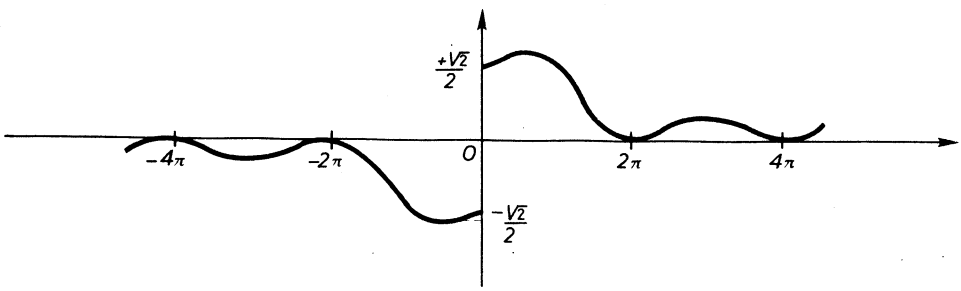


Fig. 4.98

Ejemplo 3

Si se considera en $x = 1$ la función $y = E[x]$, resulta que también presenta en este punto (y en todos los de abscisa entera) una discontinuidad de primera especie, pues $\lim_{x \to 1_+} E[x] = 1$, $\lim_{x \to 1_-} E[x] = 0$, pero en este caso a diferencia de los ejemplos 1 y 2 la función está definida en $x = 1$, pues $E[1] = 1$, y su valor coincide con $\lim_{x \to 1_+} E[x]$, es decir, es semicontinua por la derecha.

4.743. Puntos de discontinuidad de segunda especie

Se dice que la función $f(x)$ tiene en el punto $x = a$ una discontinuidad de segunda especie, cuando no existe límite a la derecha o a la izquierda o a ambos lados (pero la función puede estar definida en el punto en que no existe límite).

Ejemplo 1

$y = \text{sen}\,\frac{\pi}{x}$. En $x = 0$ no existe límite ni a la derecha ni a la izquierda. (Fig. 4.99.)

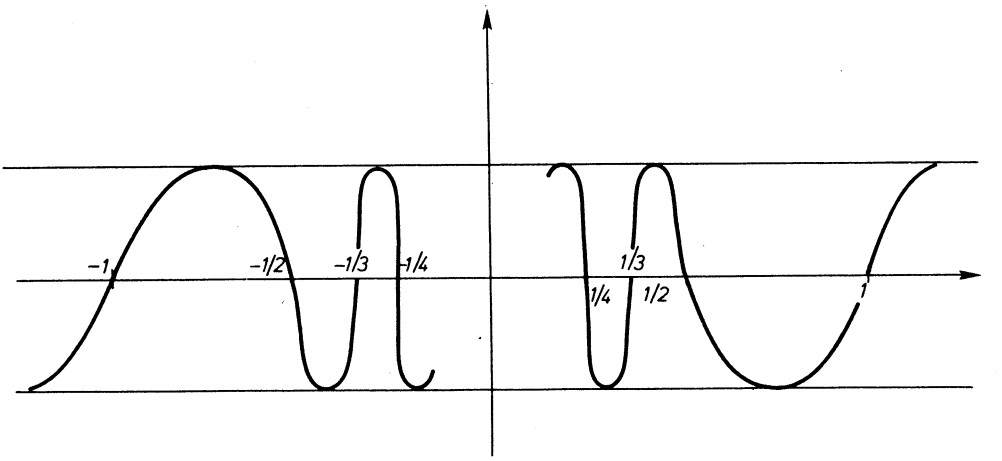


Fig. 4.99

Ejemplo 2

$$y = \frac{\text{sen } 1/x}{1 + e^{1/x}} \text{ es tal que en } x = 0$$

$\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{\text{sen } 1/x}{1 + e^{1/x}} = 0$, pues $|\text{sen } 1/x| \leq 1$ y $\lim\limits_{x \to 0_+} e^{1/x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0_-} \dfrac{\text{sen } 1/x}{1 + e^{1/x}}$ no existe, pues $\lim\limits_{x \to 0_+} e^{1/x} = 0$ y el sen $1/x$ ni está definido ni tiene límite en $x = 0$.

Convenios:

1.º) Si $f(x)$ es semicontinua por la izquierda en $x = a$, y no está definida a la derecha de $x = a$, se dice que es continua.

Ejemplo 1

$y = \sqrt{4 - x^2}$ en $x = +2$

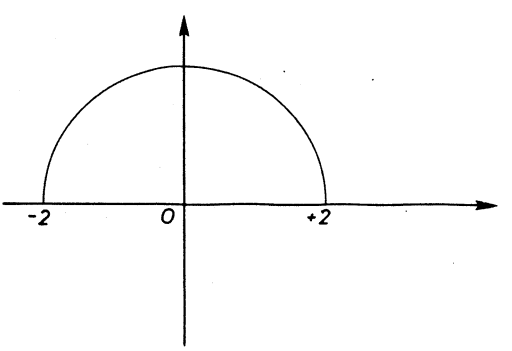


Fig. 4.100

Si $f(x)$ es semicontinua por la derecha en $x = a$, y no está definida a la izquierda de $x = a$, decimos que es continua.

Ejemplo 2

$y = \sqrt{4 - x^2}$ en $x = -2$

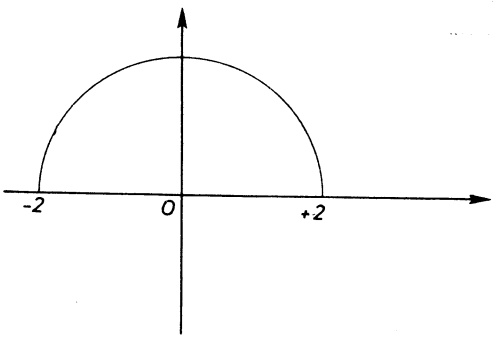


Fig. 4.101

2.º) Si $\lim_{x \to a_+} f(x)$ o $\lim_{x \to a_-} f(x)$ es infinito consideramos que la discontinuidad es de segunda especie.

4.75. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Reunimos en los cuatro teoremas siguientes las propiedades más importantes de las funciones continuas.

I. *Teorema relativo al signo de las funciones continuas*

> Sea $f(x)$ continua en el punto $x = p$. Existe un intervalo abierto que contiene al punto p, tal que la función tiene el mismo signo que $f(p)$ en cualquier punto del intervalo.

Demostración

Sea $f(p) > 0$ (análogo razonamiento si $f(p) < 0$).

Puesto que $f(x)$ es continua en $x = p$, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$, luego existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ siempre que $|x - p| < \delta$, es decir que

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

que se puede escribir en la forma

$$x \in (p - \delta,\ p + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(p) - \varepsilon,\ f(p) + \varepsilon)$$

Esto se verifica para cualquier valor de ε; en particular se verificará para $\varepsilon = f(p) > 0$; luego, $x \in (p - \delta,\ p + \delta) \Rightarrow f(x) \in (0,\ 2f(p))$, que es lo mismo que decir que $f(x)$ es positivo (o sea tiene el mismo signo que $f(p)$ para cualquier punto del intervalo abierto $(p - \delta,\ p + \delta)$), c.q.d.

El teorema «quiere decir» que en un cierto entorno (o intervalo) del punto p la gráfica está del mismo lado respecto del eje x, que el punto $(p, f(p))$. (Fig. 4.102.)

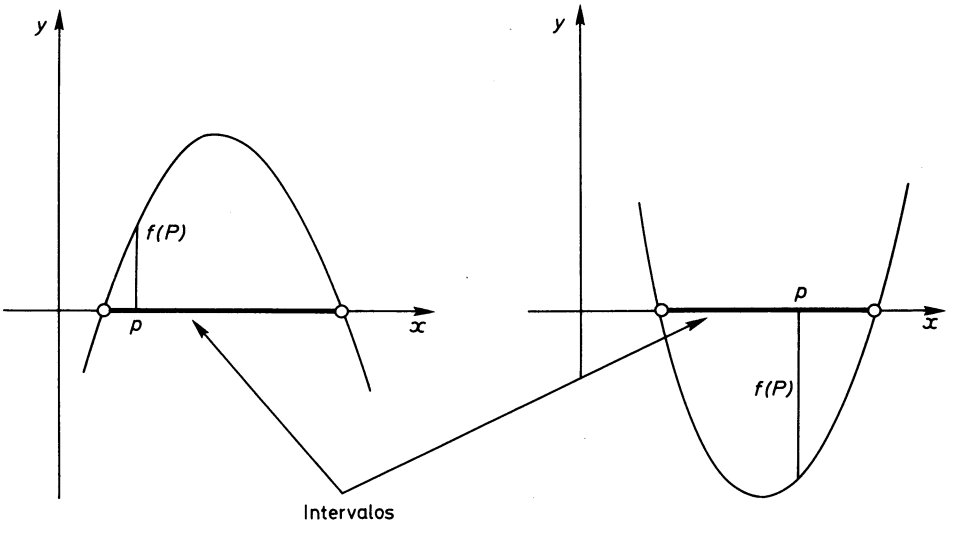


Fig. 4.102

II. *Teorema de los ceros de Bolzano*

Sea $f(x)$ continua en cada punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y sean $f(b)$ y $f(a)$ de signos contrarios:

$$f(a) < 0 < f(b), \quad \text{o bien} \quad f(a) > 0 > f(b).$$

Existe un punto $p \in [a, b]$ tal que $f(p) = 0$.

Las gráficas ayudarán a fijar las ideas. (Fig. 4.103.)

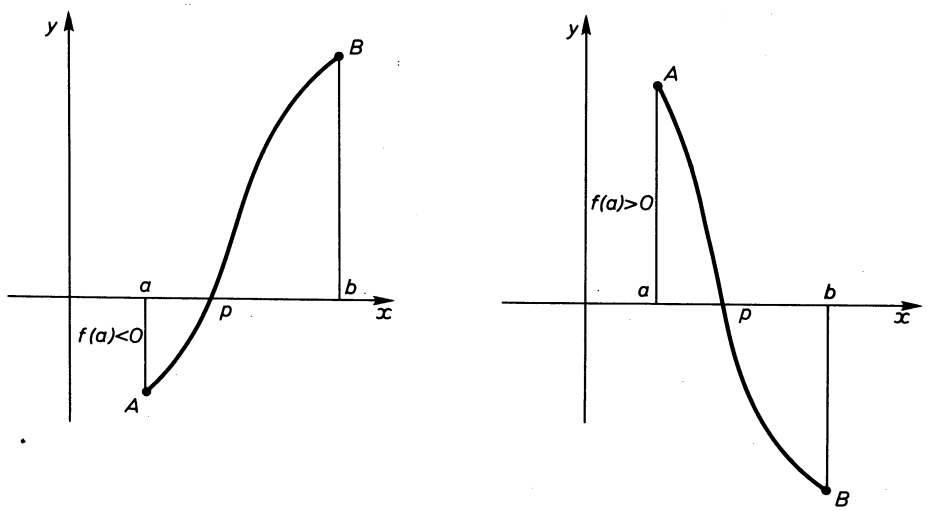


Fig. 4.103

Demostración

Sea

$$A = \{x/x \in [a, b], f(x) < 0\}$$

$A \neq \phi$, pues $a \in A$, ya que $f(a) < 0$ por hipótesis.

A está acotado, pues $A \subset [a, b]$; luego tiene extremo superior $p = \sup(A)$, y puesto que b es cota superior de A, resulta que $p \leq b$, de donde $p \in [a, b]$.

Caben las posibilidades $f(p) < 0$, $f(p) > 0$, o bien $f(p) = 0$. Si se demuestra que no se verifican las dos primeras, habrá de verificarse necesariamente la tercera y con esto se concluye la demostración, ya que existe un punto, el p, en el que la función se anula.

Si $f(p) < 0$, por el teorema relativo al signo, existe un intervalo abierto $(p - \delta, p + \delta)$ en el cual $f(x)$ es negativo y, por tanto, p no podría ser el extremo superior, ya que cualquier punto de $(p, p + \delta) \subset A$ le superaría.

Si $f(p) > 0$, por el mismo teorema, existe un intervalo $(p - \delta, p + \delta)$ en el cual $f(x)$ es positiva, en cuyo caso p no sería extremo superior puesto que cualquier punto de $(p - \delta, p)$ es una cota superior de A, y menor que p.

Luego la única posibilidad es

$$f(p) = 0, \qquad \text{c.q.d.}$$

Este teorema se interpreta diciendo que la gráfica de la función continua puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Para pasar del punto A al punto B hemos de cortar al eje x.

III. *Teorema de Weierstrass (o de valor intermedio)*

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la función toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

Interpretación gráfica

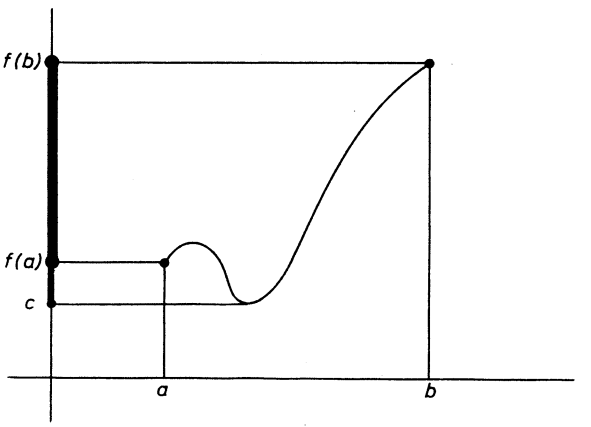


Fig. 4.104

Recorrido $= [c, f(b)]$; $[f(a), f(b)] \subset f([a, b]) = [c, f(b)]$.

Demostración

Supongamos y_0 tal que $f(a) < y_0 < f(b)$.

Hemos de probar que existe un $p \in [a, b]$, tal que $f(p) = y_0$.

Consideremos la función $g(x) = f(x) - y_0$ que es continua (por ser diferencia de dos funciones continuas) y verifica $g(a) < 0 < g(b)$, pues

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0, \quad \text{ya que} \quad f(a) < y_0$$
$$g(b) = f(b) - y_0 > 0, \quad \text{ya que} \quad f(b) > y_0$$

Puesto que verifica las hipótesis del teorema de Bolzano, existe un punto $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$, o sea

$$g(p) = f(p) - y_0 = 0,$$

de donde

$$f(p) = y_0, \qquad \text{c.q.d.}$$

IV. *Teorema relativo a los extremos absolutos*

> Toda función continua en un intervalo cerrado tiene un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo.

La demostración de este teorema requiere conocimientos más elevados de topología, y se sale de los límites de este libro. Se demuestra como aplicación de que «la imagen continua de un conjunto compacto y conexo es un conjunto compacto y conexo».

Conjunto «conexo», dicho de una manera informal, es aquel que consta de un solo trozo. En la recta los únicos conjuntos conexos son los intervalos (abiertos, cerrados o semiabiertos).

Conjunto «compacto» es el que verifica la condición de Heine-Borel (ya hemos hablado de este concepto al tratar la topología de la recta).

Los únicos conjuntos de la recta que son a la vez compactos y conexos son los *intervalos cerrados*, luego la imagen continua de un intervalo cerrado es un intervalo cerrado, lo cual equivale al teorema, pues los extremos del intervalo cerrado son el máximo y el mínimo absolutos.

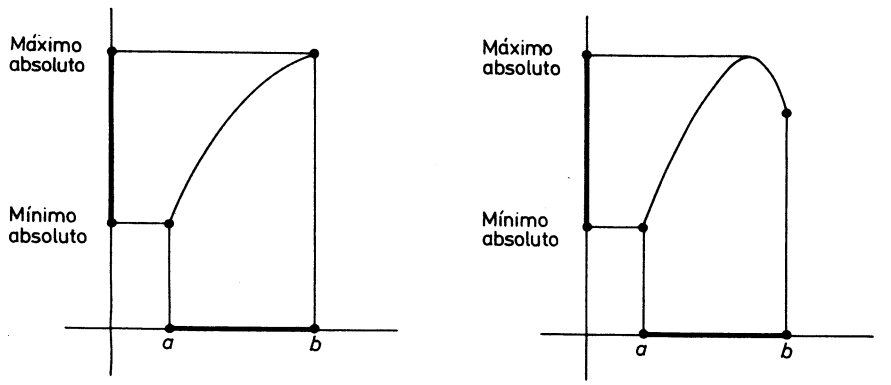


Fig. 4.105

4.76. EJEMPLOS DE CONTINUIDAD Y DE DISCONTINUIDAD

1) Sea la función $y = f(x)$, de gráfica:

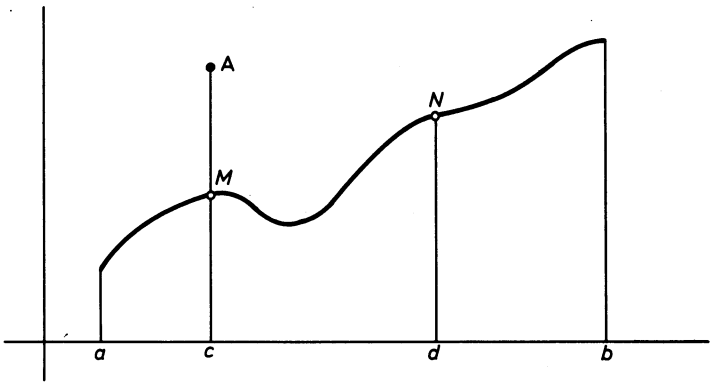


Fig. 4.106

dominio $= [a, b] - \{d\}$

discontinua en c porque

$$\left.\begin{array}{l} cM = \lim\limits_{x \to c} f(x) \\ cA = f(c) \end{array}\right\} \; cM \neq cA$$

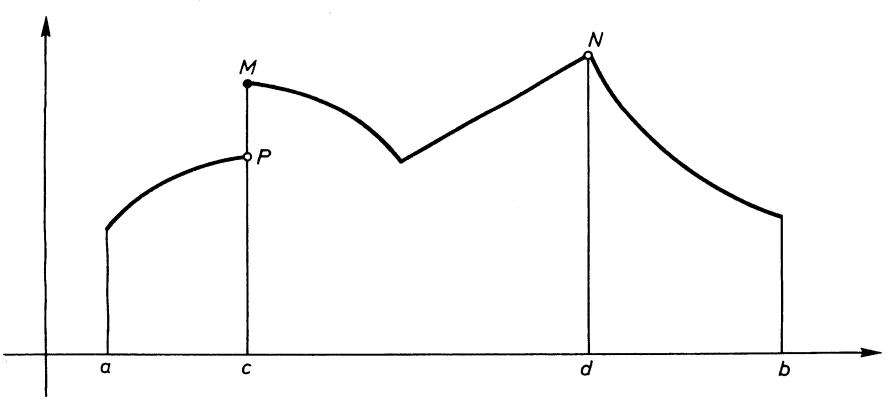
discontinua en d porque $d \notin$ dominio de $f(x)$, pero existe $\lim\limits_{x \to d} f(x) = aN$.

La discontinuidad en ambos puntos es evitable porque en ambos existe el límite de la función.

Hacemos que la función sea continua, es decir, *evitamos* la discontinuidad, haciendo que la función tome como valor en los puntos c y d el valor del límite; es decir:

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x) = cM$$
$$f(d) = \lim_{x \to d} f(x) = dN$$

2) Sea la función $y = f(x)$, representada por la gráfica:



dominio $= [a, b] - \{d\}$

Fig. 4.107

La función es discontinua en d porque este punto no pertenece al dominio de la función, sin embargo, existe $\lim_{x \to d} f(x) = dN$.

La discontinuidad en el punto d la podemos evitar dando a la función el valor de límite, ó sea

$$f(d) = \lim_{x \to d} f(x) = dN$$

En el punto c la función es discontinua porque no existe $\lim_{x \to c} f(x)$, por lo tanto esta discontinuidad no es evitable

$$\lim_{x \to c_-} f(x) = cP$$
$$\lim_{x \to c_+} f(x) = cM \qquad \text{pero } cP \neq cM$$

Es una discontinuidad de primera especie.

Es semicontinua por la derecha, pues

$$f(c) = cM = \lim_{x \to c_+} f(x)$$

3) Sea la función $y = f(x)$ definida así:

$f(x) = 1$ si x = número irracional
$f(x) = 2$ si x = número racional
dominio = $\mathcal{R}$

La gráfica es:

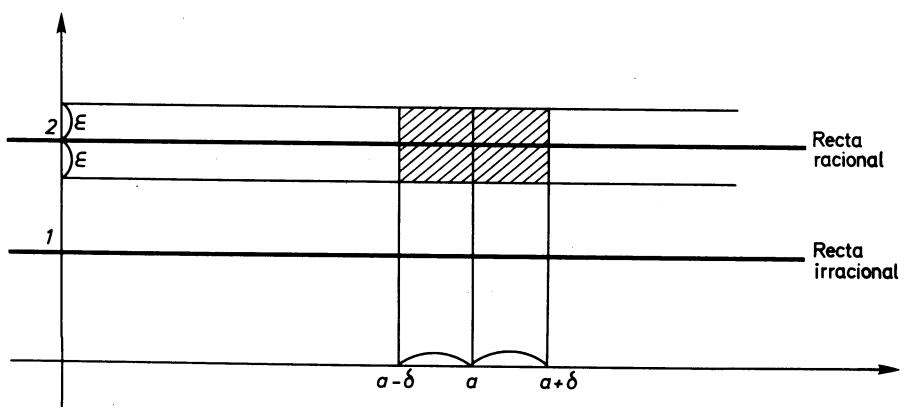


Fig. 4.108

Esta función es discontinua en todos sus puntos.

Además, la discontinuidad es de segunda especie, pues no existe límite a la derecha ni a la izquierda de ningún punto.

De existir límite habría de ser 1 ó 2. Ahora bien, si llevamos ε «arriba y abajo» de 2, de una manera que quede 1 fuera del entorno (para lo cual basta tomar $\varepsilon < 1$), no es posible para ningún entorno de a (o semientorno a derecha o izquierda) que todos sus puntos tengan una imagen dentro del rectángulo rayado, *ya que tanto en* $(a - \delta, a)$ *como en* $(a, a + \delta)$ *hay números irracionales cuya imagen pertenecerá a la recta irracional a la distancia* 1 *que, como hemos dicho, queda fuera del rectángulo.* Este razonamiento hecho para 2 puede repetirse para el otro valor posible del límite, a saber, 1.

4) Consideremos la función $y = f(x)$ definida así:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \quad \text{para } x \text{ racional} \\ f(x) &= \sqrt{2} \quad \text{para } x \text{ irracional} \\ \text{dominio} &= \mathfrak{R} \end{aligned}$$

El único punto en el que la función es continua es $x = \sqrt{2}$. En cualquier otro punto de la recta la función es discontinua y además tiene una discontinuidad de segunda especie, que es el mayor grado de discontinuidad.

Gráfica:

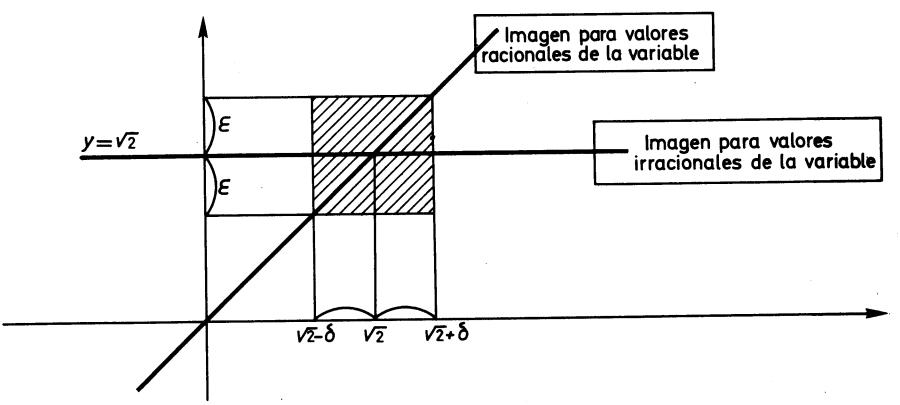


Fig. 4.109

Fijado ε, cualquier punto de $(\sqrt{2} - \delta, \sqrt{2} + \delta)$ tiene su imagen en $(\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} + \varepsilon)$ siempre que $\delta \leq \varepsilon$; además

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

Para cualquier otro punto $x = a$ es discontinua, pues el límite o es a o $\sqrt{2}$, ya que si fuera h, distinto de estos valores, existiría un entorno de a suficientemente pequeño, tal que ninguno de sus puntos tenga su imagen en $(h - \varepsilon, h + \varepsilon)$.

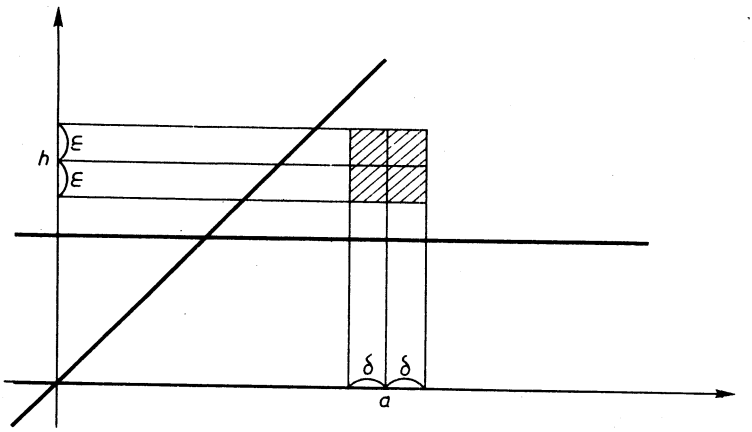


Fig. 4.110

A continuación se procede a estudiar los otros dos casos posibles.

1.º El límite es $\sqrt{2}$.

Fijado ε, podemos conseguir que la imagen de los irracionales esté en $(\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} + \varepsilon)$, como ocurre para cualquier entorno de a, pero no ocurrirá para los racionales.

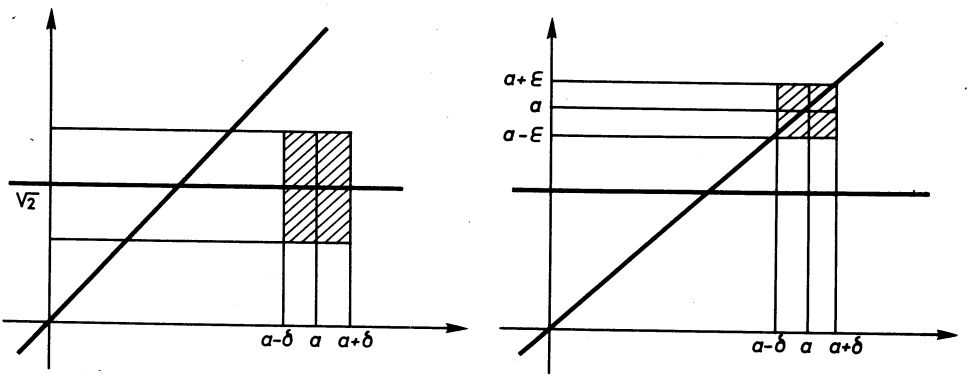


Fig. 4.111

2.º El límite es a.

Fijado cualquier ε, podemos conseguir que la imagen de los racionales de un cierto entorno de a esté en $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; pero no así para los irracionales.

Resulta, pues, que es discontinua de segunda especie en cualquier punto excepto en $x = 2$, en el que es continua.

4.77. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

4.770.
Demuéstrese que la función sen x es continua en cualquier punto.

4.771.
Determínense razonadamente los puntos de discontinuidad de tg x.

4.772.
Determínense los puntos de discontinuidad de la función $y = \left[\frac{x}{|x|}\right]$

$[\ ] \equiv$ parte entera.

4.773.
Estúdiese la continuidad de la función $y = E[x]$.

4.774.
Analícese la continuidad de la función $y = \operatorname{cosec} x$.

4.775.
Demuéstrese que un polinomio es función continua en cualquier punto.

4.776.
Estúdiense los casos en que el cociente de dos funciones continuas deja de ser continuo.

4.777.
Demuéstrese que la función cos x es continua en cualquier punto.

4.778.
Estúdiese la continuidad de Lx.

4.779.
Analícese la continuidad de la función e^x.

4.8

Aproximación lineal. Derivada y diferencial

4.81. Aproximación de una función por otra en un punto

4.82. Aproximación lineal de una función en un punto

4.83. Derivada de una función en un punto

4.84. Diferencial de una función en un punto

4.85. Continuidad de la función derivable

4.86. Cálculo de derivadas

4.87. Curvas osculatrices a una curva en un punto

4.88. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.8

Aproximación lineal. Derivada y diferencial

4.81. APROXIMACION DE UNA FUNCION POR OTRA EN UN PUNTO

Considérese una función $y = f(x)$. Supóngase que existe otra función $y = g(x)$, que coincide con la anterior en el punto $x = a$, es decir: $f(a) = g(a)$.

Se pretende estudiar el grado de aproximación o de ajuste de la función $y = g(x)$ a la función $y = f(x)$ en las proximidades del punto $x = a$.

Consideremos un punto próximo al $x = a$ que será el $a + \Delta x$.

La aproximación o ajuste será tanto mayor cuanto menor sea $|\overline{PQ}| = f(a + \Delta x) - g(a + \Delta x)$.

Ahora bien: $|\overline{PQ}|$ es una función de Δx que es infinitesimal en el punto $\Delta x = 0$, es decir, que $\lim_{\Delta x \to 0} |\overline{PQ}| = 0$ (véase figura 4.112).

Para tener una medida del ajuste o aproximación se compara el infinitésimo $|\overline{PQ}| = f(a + \Delta x) - g(a + \Delta x)$ con los infinitésimos (Δx), $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$, ..., es decir, se determina el orden de $|PQ|$.

Si $|\overline{PQ}|$ es un infinitésimo de orden $(n + 1)$, o sea, si $|\overline{PQ}|$ es del mismo orden que $(\Delta x)^{n+1}$ se dice que *el ajuste o aproximación es de orden n*

Se concreta:

($y = g(x)$ tiene un ajuste o aproximación de orden n a $y = f(x)$ en el punto $x = a$) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - g(a + \Delta x)}{(\Delta x)^{n+1}} = c \neq 0 \right)$$

Cuanto mayor sea el orden de ajuste o aproximación más próximas estarán las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, para un mismo Δx suficientemente pequeño.

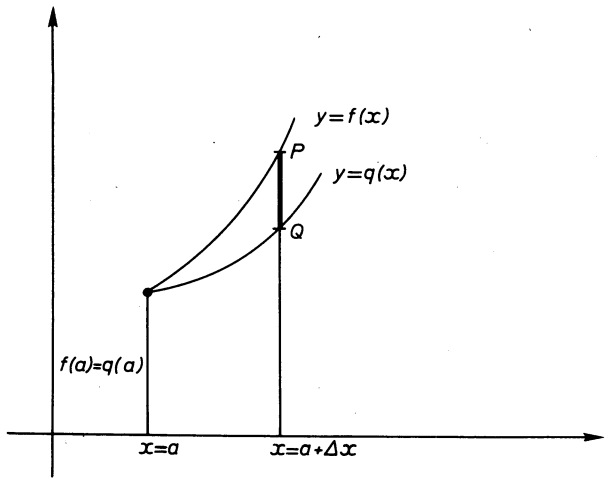


Fig. 4.112

4.82. APROXIMACION LINEAL DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Supongamos ahora que se pretende aproximar la función por medio de una recta. (Fig. 4.113.) Sea la función $y = f(x)$ en $x = a$.

Si consideramos una recta del haz de vértice $M(a, f(a))$:

$$y - f(a) = m(x - a) = m\,\Delta x$$

es decir, $y = f(a) + m\,\Delta x$, se tendrá $|\overline{PQ}| = f(a + \Delta x) - f(a) - m\,\Delta x$.

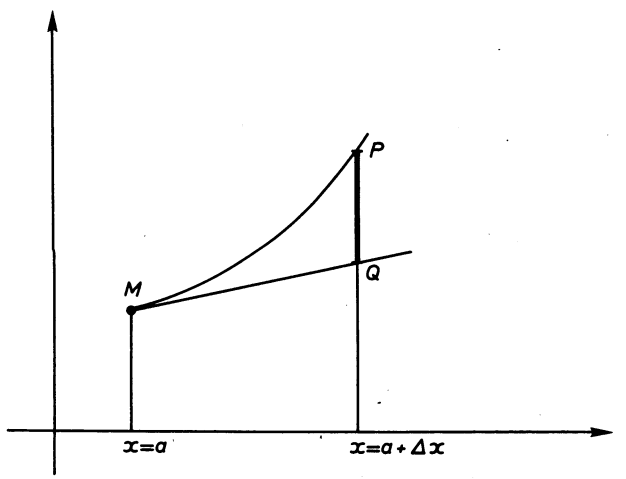


Fig. 4.113

Ha de determinarse el parámetro m con la condición de que el ajuste sea del mayor orden posible. Basta con que $|\overline{PQ}|$ sea de orden superior a Δx, para lo cual ha de verificarse

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\overline{PQ}|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a) - m\,\Delta x}{\Delta x} = 0$$

o sea

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Este valor de m es la pendiente de la recta que pasa por el punto $M(a, f(a))$, y que más se ajusta o aproxima a la curva $y = f(x)$. A m se le llama *derivada* de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$.

La recta en cuestión se llama *tangente* a la curva en $x = a$.

4.83. DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

La derivada de una función en un punto $x = a$ es un número real que representamos por $f'(a)$, si la función es $y = f(x)$, y que según se ha definido es

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

La derivada es la pendiente de la recta que más se ajusta en el punto, a la que hemos llamado tangente. Cualquier recta que pasa por el punto $M(a, f(a))$ tiene un contacto de orden 0; la tangente tiene un contacto de orden 1 o mayor.

Se establece que una función es derivable en un punto cuando existe el límite que define la derivada, lo que equivale a que su gráfica tiene tangente en el punto.

En el caso de que la gráfica de la función tenga dos tangentes (o mejor, semitangentes) en el punto, se dice que admite *derivadas a la derecha y a la izquierda.*

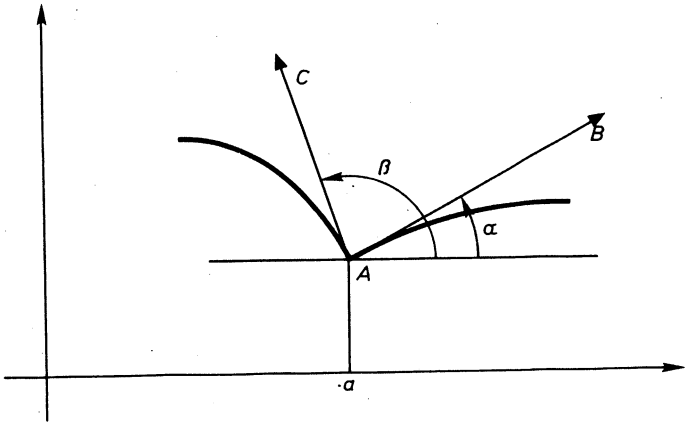


Fig. 4.114

Las derivadas a derecha e izquierda son las pendientes respectivas de las semitangentes.

El punto en cuestión se llama «punto anguloso» por razones obvias.

La gráfica de la figura 4.114 tiene un *punto anguloso A* correspondiente a la abscisa $x = a$. AB es la semitangente a la derecha, y AC es la semitangente a la izquierda.

La *derivada a la derecha* es la pendiente de la recta AB, o sea

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a_+)$$

La *derivada a la izquierda* es la pendiente de la recta AC, es decir

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a_-)$$

Ejemplo

$$y = |\cos x|$$

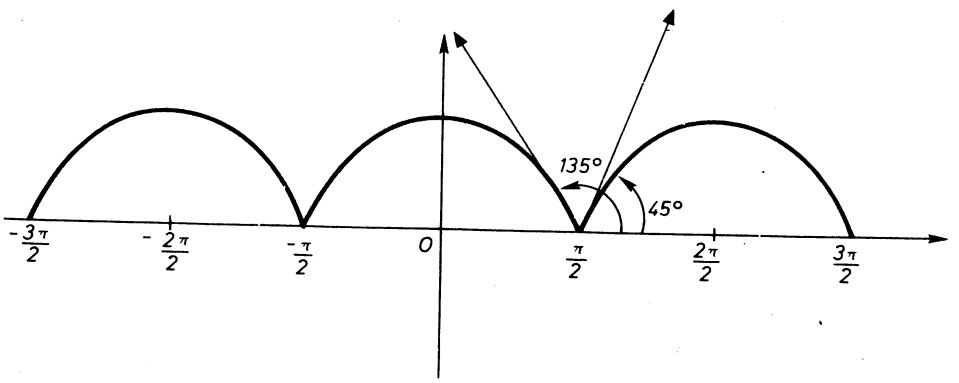


Fig. 4.115

$$y'(\pi/2_+) = 1 = \operatorname{tg} 45°$$
$$y'(\pi/2_-) = -1 = \operatorname{tg} 135°$$

Lo mismo se repite para $x = (2K + 1)\pi/2 \quad K \in Z$.

De la anterior definición se deduce que toda función derivable en un punto lo es a derecha e izquierda. Es condición necesaria y suficiente para que una función sea derivable que sus derivadas a derecha e izquierda existan y sean iguales.

La derivación parcial a derecha e izquierda es una debilitación del concepto de derivada. Pero hay funciones que no son derivables ni siquiera en un sentido. Un ejemplo clásico es la función

$$y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{para} \quad x \neq 0$$

$$y = 0 \quad \text{para} \quad x \neq 0$$

Esta función no tiene derivada a derecha ni a izquierda, pues

$$\nexists \lim_{x\to 0_+} \frac{x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0_+} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$$

y

$$\nexists \lim_{x\to 0_-} \frac{x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0_-} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$$

4.84. DIFERENCIAL DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

En la proximidad del punto M, para cada valor dado a Δx obtendremos

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Δy es una función de Δx infinitesimal en $\Delta x = 0$

$$\Delta y = |\overline{PH}| = |\overline{PQ}| + |\overline{QH}| = |\overline{PQ}| + f'(a)\,\Delta x$$

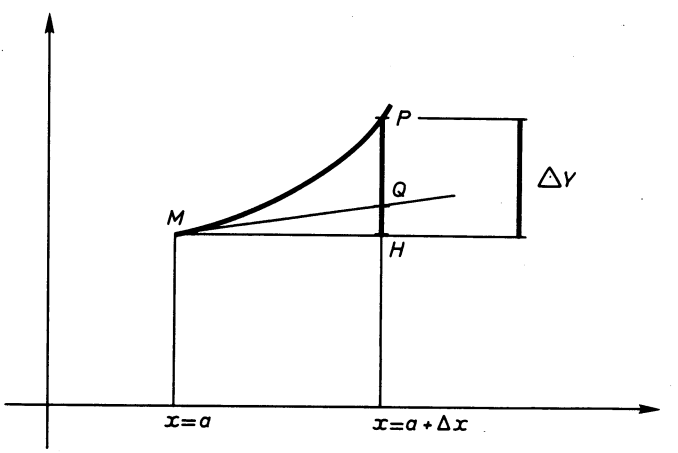


Fig. 4.116

Como $|\overline{PQ}|$ es un infinitésimo de orden superior a Δx, resulta que la parte principal del infinitésimo Δy será $f'(a)\,\Delta x$.

Se puede comprobar, viendo que

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{f'(a)\,\Delta x} = \frac{1}{f'(a)} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(a)}{f'(a)} = 1$$

A la parte principal del infinitésimo Δy se la llamó dy (y se lee «diferencial de y»); así, se escribe:

$$dy = f'(a)\,\Delta x = |\overline{QH}|$$

Si $y = x$, resultará $y' = 1$, luego $dy = \boxed{dx = 1\,\Delta x}$;

por tanto se puede establecer: $\boxed{dy = f'(a)\,dx}$

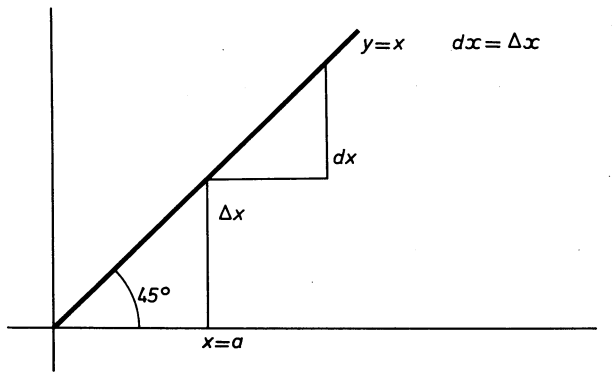


Fig. 4.117

La diferencial de una función en un punto es una función lineal; es la función lineal que más se ajusta en el punto a la función dada.

4.85. CONTINUIDAD DE LA FUNCION DERIVABLE

Proposición. Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.

Demostración

Sea $f(x)$ derivable en $x = a$, o sea, tal que existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Vamos a demostrar que es continua, es decir, que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0,$$

lo cual es inmediato, pues

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=$$
$$=f'(a)\cdot 0=0, \quad \text{c.q.d.}$$

El recíproco no se verifica. Veamos un contraejemplo clásico:

La función

$$\begin{cases} y=x\,\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x} & \text{para } x\neq 0 \\ y=0 & \text{para } x=0 \end{cases}$$

es continua en $x=0$, pero no es derivable en este punto, pues no existe el $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$.

Ejercicio

Demuéstrese que si una función tiene derivada a derecha e izquierda es continua.

4.86. CALCULO DE DERIVADAS

Se recuerdan a continuación las fórmulas de derivación de uso corriente. No nos extendemos en detalles, por suponer son conocidas del lector.

1. $y=c\Rightarrow y'=0$

$$\Delta y=0$$

luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}0=0$$

2. $y=x\Rightarrow y'=1$

$$\Delta y=(x+\Delta x)-x=\Delta x;\ y'=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

3. $y=x^n\Rightarrow y'=n\times{}^{n-1}$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+nx^{n-1}\,\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n-x^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\Delta x\,(\ldots)$$

luego

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

4. $y = u(x) + v(x) \Rightarrow y' = u' + v'$

$$y = u + v \quad ; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \Rightarrow y' = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

5. $y = u(x)\, v(x) \Rightarrow y' = uv' + u'v$

$$y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = uv' + vu'$$

6. $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

$$yv = u \Rightarrow u' = vy' + v'y \Rightarrow y' = \frac{u' - v'u/v}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

7. *Derivada de una función de función*.*

$$y = f(u) \quad ; \quad u = \varphi(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y tomando límites resulta

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

8. $y = \operatorname{sen} x \Rightarrow y' = \cos x$

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$$

---

* Este razonamiento es rápido e intuitivo, pero incorrecto, ya que puede aparecer la indeterminación $0 \cdot \infty$. Véase razonamiento riguroso en *Cálculus de Apóstol o de Spivac*, ambos en Ed. Reverté.

pues

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

puesto que el seno y el arco son infinitésimos equivalentes.

9. $y = \cos x \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} x$

$$y = \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \underset{\text{(por 7)}}{\Rightarrow} y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$$

10. $y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{(basta aplicar 6)}$$

11. $y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{(basta aplicar 6)}$$

12. *Derivada de una función inversa*

$$y = f(x) \Rightarrow x = \varphi(y) \quad ; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$$

13. $y = Lx \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

$$y = L(x + \Delta x) - Lx = L\frac{x + \Delta x}{x} = L\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{L\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} L\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

pero

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = e$$

luego

$$y' = \frac{1}{x}$$

14. $y = \log_a x = \dfrac{Lx}{La} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{La}\dfrac{1}{x}$

15. $y = a^x \Rightarrow y' = a^x La$

$$Ly = xLa \quad ; \quad \frac{y'}{y} = La \Rightarrow y' = La \cdot y = La \cdot a^x$$

4.87. CURVAS OSCULATRICES A UNA CURVA EN UN PUNTO

Una curva puede representar una función o una colección de funciones. Consideremos la curva de ecuación $y = f(x)$ (puede ser una parte de la curva, o sea, una «rama» de la función multiforme que, en general, representa la curva).

Se desea aproximar la curva anterior en el punto $x = a$, por medio de otra curva de un tipo dado, por ejemplo, circunferencia, parábola de segundo grado, etcétera. De todas las curvas de la familia existirá una que es la que mejor se ajusta a $y = f(x)$ en $x = a$; esta curva se llama *curva osculatriz* a la dada en $x = a$.

En el capítulo siguiente, como primera aplicación del desarrollo de Taylor, se demostrará que «si $y = g(x)$ es una aproximación de orden n en $x = a$ a $y = f(x)$ se verifica $f(a) = g(a)$; $f'(a) = g'(a)$; ...; $f^n(a) = g^n(a)$; $f^{n+1}(a) \neq g^{n+1}(a)$; y así recíprocamente».

Por tanto ya tenemos las condiciones a imponer para determinar la curva osculatriz.

Ejemplo 1

Determínese la parábola de eje vertical, osculatriz a una curva $y = f(x)$.

Familia de parábolas de eje vertical $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$;

$$g(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 \quad ; \quad g'(x) = 2a_0x + a_1 \quad ; \quad g''(x) = 2a_0$$

$$\begin{aligned} f(a) = g(a) &\Leftrightarrow f(a) = a_0a^2 + a_1a + a_2 \\ f'(a) = g'(a) &\Leftrightarrow f'(a) = 2a_0a + a_1 \\ f''(a) = g''(a) &\Leftrightarrow f''(a) = 2a_0 \end{aligned}$$

Las tres condiciones anteriores sirven para determinar los tres parámetros a_0, a_1 y a_2 que resuelven el problema.

$$a_0 = \underline{\frac{f''(a)}{2}} \quad ; \quad a_1 = f'(a) - 2a_0a = \underline{f'(a) - af''(a)} \quad ;$$

$$a_2 = f(a) - a_0a^2 - a_1a = f(a) - \frac{a^2}{2}f''(a) - af'(a) + a^2f''(a) =$$

$$= \underline{\left| f(a) - af'(a) + \frac{a^2}{2}f''(a) \right|}$$

luego la parábola de eje vertical osculatriz a $y = f(x)$ en el punto $x = a$ es

$$y = \frac{f''(a)}{2}x^2 + (f'(a) - af''(a))x + (f(a) - af'(a) + \frac{a^2}{2}f''(a))$$

Ejemplo 2

Determínese la circunferencia osculatriz a $y = f(x)$.
La familia de circunferencias del plano será $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$.

Derivamos dos veces

$$2(x - x_0) + 2(y - y_0)y' = 0 \quad ; \quad 1 + y'^2 + (y - y_0)y'' = 0$$

La circunferencia ha de tener en $x = a$: $y = f(a)$; $y' = f'(a)$; $y'' = f''(a)$, luego se verificará

$$(a - x_0)^2 + (f(a) - y_0)^2 - R^2 = 0$$
$$(a - x_0) + (f(a) - y_0)f'(a) = 0$$
$$1 + f'(a)^2 + (f(a) - y_0)f''(a) = 0$$

De la última expresión resulta y_0, que sustituida en la segunda determina x_0, y ambas sustituidas en la primera determinan R.

$$x_0 = a - \frac{f'(a)(1 + f'(a)^2)}{f''(a)}$$

$$y_0 = f(a) + \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)}$$

$$R = \frac{(1 + f'(a)^2)^{3/2}}{f''(a)}$$

Estas son las coordenadas del centro y el valor del radio de la circunferencia osculatriz en el punto $x = a$, a la curva $y = f(x)$.

En todos los casos la idea es la siguiente:
Se escribe la ecuación general de la familia de curvas, que dependerá de un cierto número de parámetros arbitrarios.
Se determinan los anteriores parámetros de modo que tenga con la función $y = f(x)$ el mayor número posible de derivadas iguales en $x = a$.

Obsérvese que la tangente a una curva en un punto tal como la hemos definido, es la recta osculatriz.

4.88. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

4.880.

Hállese el orden de la aproximación de $y = (x - 3)^4$ con el eje de las x, en el punto $x = 3$.

4.881.

Hállese el orden de la aproximación de las curvas $y = x^2 - 6x + 14$ e $y = 5$ en $x = 3$.

4.882.

Hállese la derivada de $y = (3x^2 - 7)^{Lx}$.

4.883.

Calcúlese la derivada de la función $y = \sqrt{e^{2x}}$.

4.884.

Hállese la diferencial en $x = 2$ de la función $y = \log_{10} \dfrac{x^2 - 5}{3}$.

4.885.

Determínese la diferencial en $x = 1$ de la función $y = (\text{artg } x)L(x^2 + 1)$.

4.886.

Establézcase la curva de la familia $y = ax^2 + bx$ que es osculatriz a $y = e^x$ en $x = 1$.

4.887.

Hállese la ecuación de la circunferencia osculatriz a la parábola $y = 3x^2 - 7x + 5$ en el punto $x = 1$.

4.888.

Determínese la recta osculatriz a la parábola $y = 4x^2 - 6$ en el punto $x = 1$.

4.889.

Establézcase la parábola de eje vertical que es osculatriz a la curva $y = x^3 - 6$ en $x = 2$.

4.9

Funciones derivables. Estudio local. Gráficos

4.901. Variación de una función acotada

4.9011. *Máximos y mínimos absolutos de una función*
4.9012. *Máximos y mínimos relativos de una función*
4.9013. *Función creciente o decreciente en un punto*

4.902. Variación de una función derivable

4.903. Teorema de Rolle

4.904. Teorema de Cauchy

4.905. Teorema de la media generalizada

4.906. Desarrollo de Taylor

4.907. Aplicaciones del desarrollo de Taylor

4.908. Concavidad, convexidad e inflexiones

4.909. Estudio de la gráfica de una función derivable

4.910. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.9

Funciones derivables. Estudio local. Gráficas

4.901. Variación de una función acotada

4.9011. *Máximos y mínimos absolutos de una función*

Se llama *máximo absoluto* de una función en un intervalo (o cualquier otro subconjunto de $\mathcal{R}$) al mayor de los valores que la función toma en el intervalo.

Puede ocurrir que no exista ningún punto en el que la función alcance el valor máximo.

Análoga definición se establecería para *mínimo absoluto.*

Se ha establecido ya un teorema que asegura que toda función continua en un intervalo cerrado tiene máximo y mínimo absolutos en el intervalo.

4.9012. *Máximos y mínimos relativos de una función*

Se dice que la función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en el punto $x = a$ cuando $f(a)$ es mayor que todos los valores de la función en un cierto entorno de $x = a$. El tamaño del entorno no importa, puede ser tan pequeño como se quiera.

Análoga definición se establecería para *mínimo relativo.*

Si $f(x)$ tiene un máximo o mínimo absolutos en un punto interior al intervalo es, al mismo tiempo, máximo o mínimo relativo.

Ejemplo

1) Sea $f(x)$ definida en $[a, b]$, cuya gráfica se ofrece en la figura 4.118.
   En $x = a$ tiene mínimo absoluto.
   En $x = b$ tiene máximo absoluto.
   No tiene máximos ni mínimos relativos.

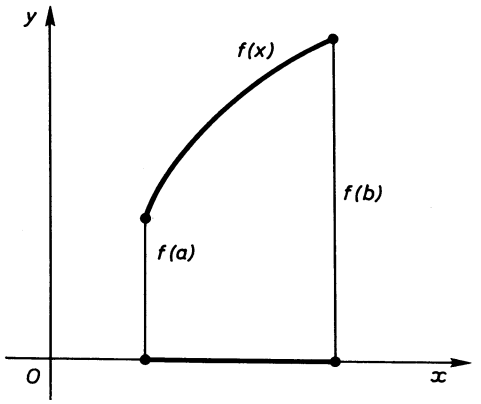


Fig. 4.118

2) Sea $f(x)$ de la figura 4.119.

En $x = a$, mínimo absoluto.
En $x = d$, mínimo relativo.
En $x = e$, máximo absoluto y relativo.

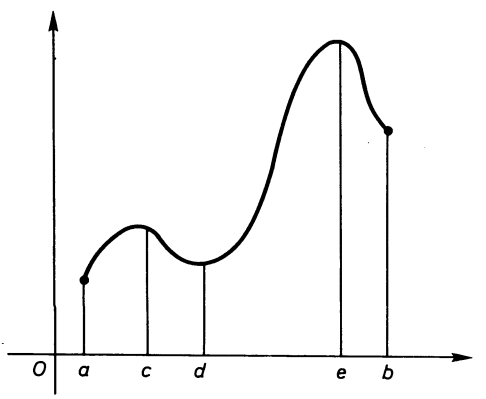


Fig. 4.119

3) Sea $f(x)$ representada en la figura 4.120.

En $x = a$, mínimo absoluto.
En $x = c$, máximo absoluto y relativo.

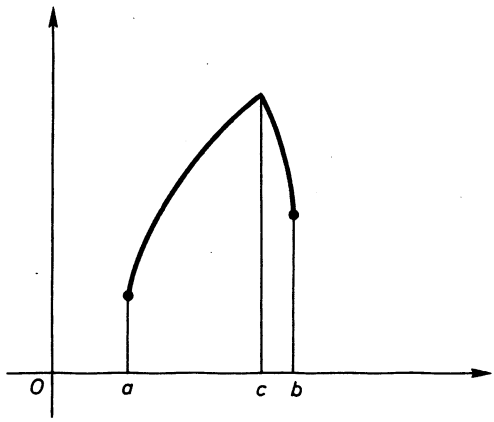


Fig. 4.120

4.9013. *Función creciente o decreciente en un punto*

Se dice que una función $f(x)$ es *creciente* en el punto $x = a$ cuando existe un entorno de $x = a$, tal que para los puntos del mismo se verifica

$$x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$$
$$x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

Se dice que la función $f(x)$ es *decreciente* en el punto $x = a$ cuando existe un entorno de este punto, tal que para todos los puntos del entorno se verifica

$$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$$
$$x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$$

Ejemplo

$f(x)$ es creciente en $x = a$, y decreciente en $x = b$.
En la figura están dibujados entornos en los que se verifica la definición.

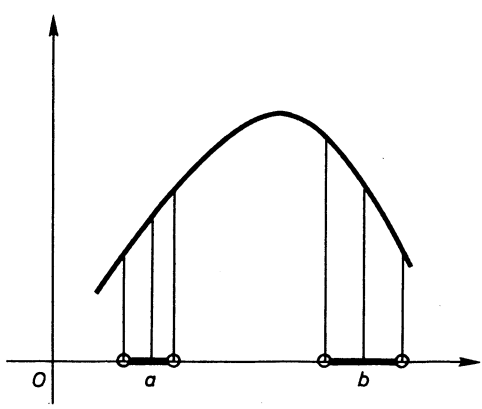


Fig. 4.121

4.902. Variación de una función derivable

Supóngase que $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$, o sea, que existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Se sabe desde el capítulo 4.6 que existe un entorno de $x = a$ en el que la función $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tiene el mismo signo que $f'(a)$.

Puede ocurrir:

I. $f'(a) > 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ en un cierto entorno de $x = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \end{cases}$ luego la *función es creciente.*

II. $f'(a) < 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$ en un cierto entorno de $x = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x > a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ x < a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{cases}$ luego la *función es decreciente.*

Consecuencia:

Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, y tiene en este punto un máximo o mínimo relativo ha de verificarse $f'(a) = 0$.

Esto es consecuencia de que si fuese $f'(a) \neq 0$, se sigue en virtud de I y II que la función es creciente o decreciente.

Resulta entonces, que la anulación de la derivada es condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de extremo relativo. (Con la palabra «extremo» designamos máximo o mínimo.)

La no suficiencia se ve observando la figura

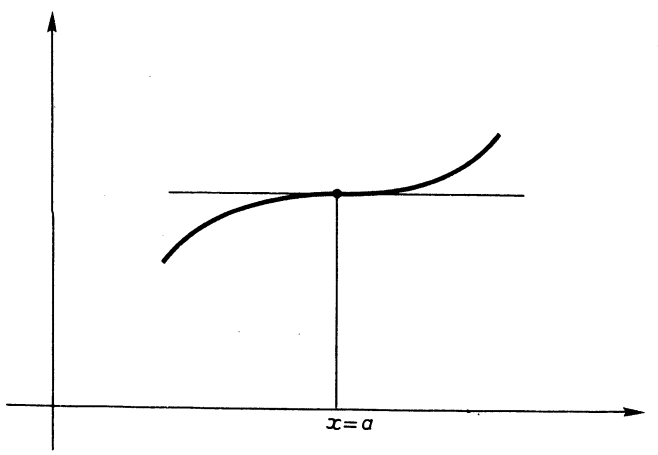


Fig. 4.122

En $x = a$ la derivada se anula puesto que la tangente es horizontal.

Estos puntos en los que la tangente atraviesa la curva se llaman *puntos de inflexión* y serán objeto de un estudio posterior.

4.903. Teorema de Rolle

El presente teorema es la base de todos los que siguen (Cauchy, media, media generalizada, Taylor).

> Supóngase que $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b), y $f(a) = f(b)$. En estas circunstancias existe un punto $\xi \in (a, b)$, tal que $f'(\xi) = 0$.

Demostración

Puesto que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, según uno de los teoremas de funciones continuas que hemos visto, resultará que $f(x)$ alcanza el máximo y el mínimo absolutos en $[a, b]$.

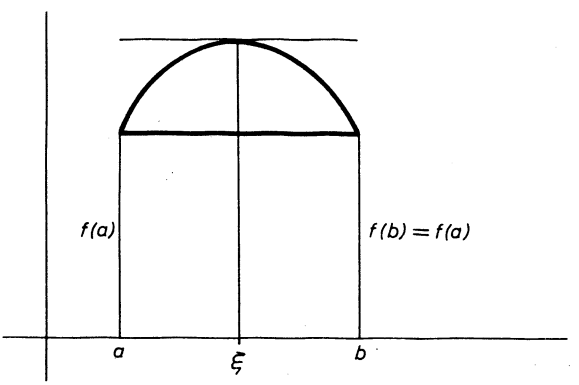


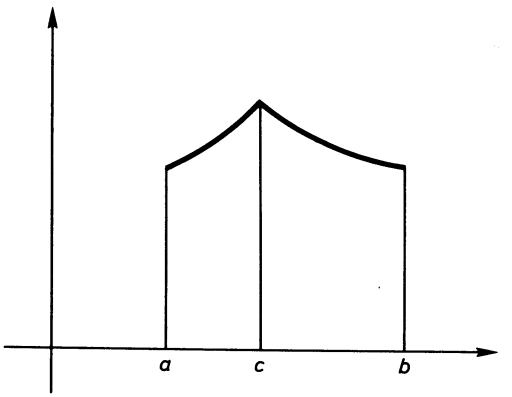
Fig. 4.123

Puede ocurrir que los dos valores los alcance en los extremos a, b, en cuyo caso la función es constante en todo el intervalo y, por lo tanto, su derivada es nula en todos los puntos.

Si el máximo o mínimo absoluto es alcanzado en un punto interior, será también máximo o mínimo relativo y como por hipótesis es derivable, su derivada se anula en el punto, c.q.d.

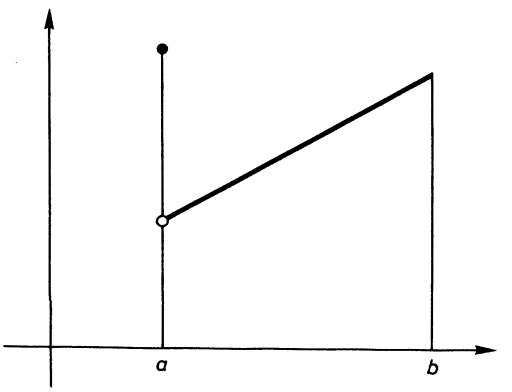
La interpretación gráfica dice que existe un punto de tangente horizontal.

Creemos interesante insistir con algunos ejemplos en los que «falla» el resultado, por «fallar» alguna de las hipótesis.



1. Continua en $[a, b]$
$f(a) = f(b)$
no es derivable en (a, b), pues no lo es en $C \in (a, b)$.

Fig. 4.124



2. Derivable en (a, b)
$f(a) = f(b)$
no es continua en $[a, b]$ por no serlo en el punto a.

Fig. 4:125

4.904. Teorema de Cauchy

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, derivables en el intervalo abierto (a, b), tales que $g(a) \neq g(b)$, y sus derivadas no se anulan simultáneamente en (a, b).
En estas circunstancias, se verifica

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

siendo ξ un punto de (a, b).

Demostración

Basta aplicar el teorema de Rolle a la función

$$\Phi(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$$

Veamos que se puede aplicar, porque $\Phi(x)$ verifica las hipótesis:

1. $\Phi(x)$ es continua, por ser suma de funciones continuas.
2. $\Phi(x)$ es derivable, por ser suma de funciones derivables.
3. $\Phi(a) = \Phi(b)$, pues

$$\Phi(a) = g(a)(f(b) - f(a)) - f(a)(g(b) - g(a)) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$
$$\Phi(b) = g(b)(f(b) - f(a)) - f(b)(g(b) - g(a)) = -g(b)f(a) + g(a)f(b)$$

Caso particular. Si $g(x) = x$ resultará

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

que es la expresión del *teorema de la media.*

Compruébese como ejercicio que $g(x) = x$ verifica las condiciones del teorema de Cauchy.

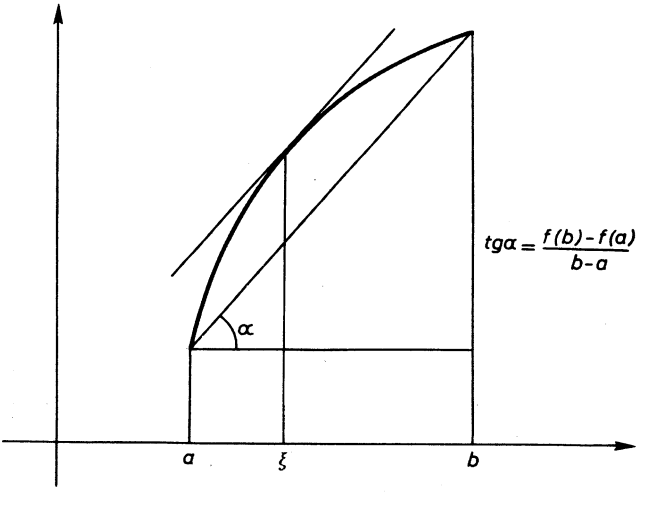


Fig. 4.126

Como puede observarse en la figura 4.126, este teorema afirma que existe un punto en el que la tangente es paralela a la cuerda.

Pendiente media de una función en un intervalo

Supongamos que la función $y = f(x)$ sea poligonal. (Fig. 4.127.)

$$f(b) - f(a) = d_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + d_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + d_3 \operatorname{tg} \alpha_3 = (d_1 + d_2 + d_3) \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + d_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + d_3 \operatorname{tg}_3}{d_1 + d_2 + d_3}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = b - a$$

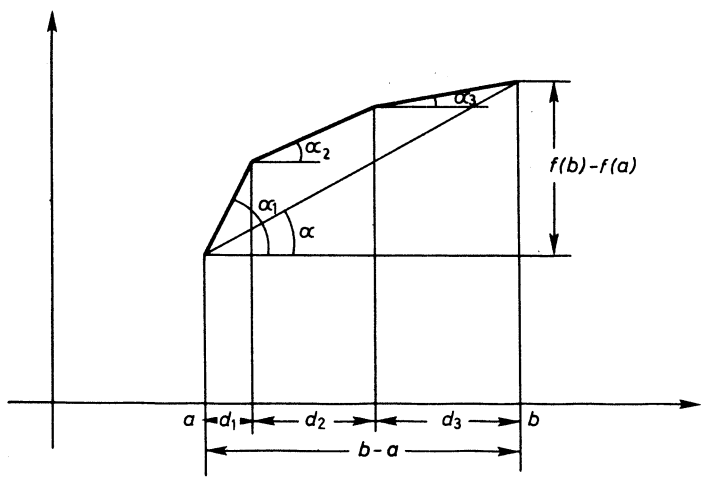


Fig. 4.127

Es decir, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\Sigma\, d_i \operatorname{tg} \alpha_i}{\Sigma\, d_i}$, fórmula válida para cualquier número de lados de la poligonal, incluso cuando el número de lados tiende a infinito.

Si se generaliza a una poligonal de un número infinito no numerable de lados, en cuyo caso la suma se convierte en integral (Fig. 4.128),

$$tg\ \alpha = \frac{\int_a^b \operatorname{tg} \alpha_x \, dx}{\int_a^b dx} = \frac{\int_a^b f'(x)\, dx}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es decir, la pendiente de la cuerda es la pendiente media del tramo, y *esta es la razón de llamarse «teorema de la media»*.

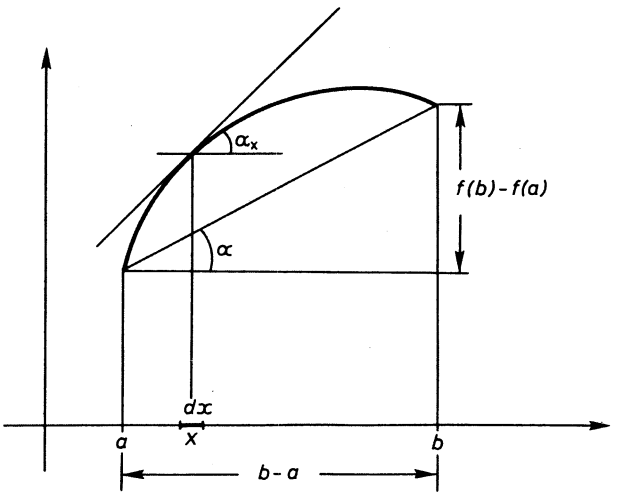


Fig. 4.128

Este teorema afirma que la pendiente media es alcanzada en algún punto del intervalo.

4.905. Teorema de la media generalizada

Sea $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable n veces en el intervalo semiabierto $[a, b)$ y tal que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{n-1}(a) = 0$; en estas circunstancias existe un punto $\xi \in (a, b)$, tal que

$$\frac{f(b)}{(b-a)^n} = \frac{f^{\underline{|n}}(\xi)}{n!}$$

NOTA. Para la demostración no se necesita que exista $f^n(a)$, por lo que las hipótesis pueden debilitarse algo.

Demostración

Basta aplicar el teorema de Cauchy, sucesivamente.

Primera aplicación

$$\text{funciones} \left\{ \begin{matrix} f(x) \\ (x-a)^n \end{matrix} \right\} \text{; intervalo } [a, b]$$

$$\frac{f(b)}{(b-a)^n} = \frac{f(b) - \overset{\overset{0}{\parallel}}{f(a)}}{(b-a)^n - \underset{\underset{0}{\parallel}}{(a-a)^n}} = \frac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1 - a)^{n-1}} \qquad \xi_1 \in (a, b)$$

Este valor se calcula mediante la,

Segunda aplicación

$$\text{funciones} \left\{ \begin{matrix} f'(x) \\ n(x-a)^{n-1} \end{matrix} \right\} \quad ; \text{intervalo } [a, \xi_1]$$

$$\frac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1 - a)^{n-1}} = \frac{f'(\xi_1) - \overset{//}{\overset{0}{f'(a)}}}{n(\xi_1 - a)^{n-1} - \underset{0}{\underset{//}{n(a-a)^{n-1}}}} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2}} \quad \xi_2 \in (a, \xi_1)$$

Este valor se calcula mediante la,

Tercera aplicación

$$\text{funciones} \left\{ \begin{matrix} f''(x) \\ n(n-1)(x-a)^{n-2} \end{matrix} \right\} \quad ; \text{intervalo } [a, \xi_2)$$

$$\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2}} = \frac{f''(\xi_2) - \overset{//}{\overset{0}{f''(a)}}}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2} - \underset{0}{\underset{//}{n(n-1)(a-a)^{n-2}}}} =$$

$$\frac{f'''(\xi_3)}{n(n-1)(n-2)(\xi_3 - a)^{n-3}} \qquad \xi_3 \in (a, \xi_2)$$

Y así sucesivamente hasta la,

Enésima aplicación

$$\text{funciones} \left\{ \begin{matrix} f^{\lfloor n-1 \rfloor}(x) \\ n(n-1)\ldots 2(x-a) \end{matrix} \right\} \quad ; \text{intervalo } [a, \xi_{n-1}]$$

$$\frac{f^{\lfloor n-1 \rfloor}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\ldots 2(\xi_{n-1} - a)} = \frac{f^{\lfloor n-1 \rfloor}(a) - \overset{//}{\overset{0}{f^{\lfloor n-1 \rfloor}(a)}}}{n(n-1)\ldots 2(\xi_{n-1} - a) - \underset{0}{\underset{//}{n(n-1)\ldots 2(a-a)}}} =$$

$$= \frac{f^n(\xi)}{n!} \qquad \xi \in (a, \xi_{n-1})$$

Resumiendo:

$$\frac{f(b)}{(b-a)^n} = \frac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1 - a)^{n-1}} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2}} = \cdots =$$
$$= \frac{f^{n-1}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\cdots 2(\xi_{n-1} - a)} = \frac{f^{\lfloor n}(\xi)}{n!}$$

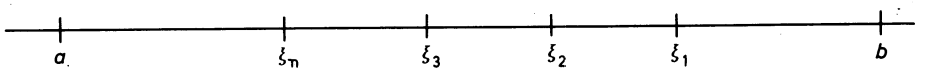


Fig. 4.129

4.906. Desarrollo de Taylor

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Podemos desarrollarlo en potencias de $(x - a)$ siendo a un valor fijo cualquiera. Sea

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

Resultará que

$$P'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \cdots + nb_n(x-a)^{n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P^{\lfloor n}(x) = n!b_n$$

Sustituyendo $x = a$ sucede

$$P(a) = b_0;\ P'(a) = 1!\,b_1;\ P''(a) = 2!b_2;\ \ldots;\ P^{\lfloor n}(a) = n!b_n$$

luego se puede escribir

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Supóngase que $f(x)$ es una función cualquiera que admite derivadas de órdenes 1, 2, 3, ... Por semejanza con la expresión anterior, se nos ocurre escribir

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Añadimos el término $R_n(x)$ porque $f(x)$ no es un polinomio de grado n. Este término es el que hemos de hallar, pues es desconocido.

$$R_n(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \ldots - \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$R_n(x)$ verifica las condiciones del teorema de la media generalizada en el intervalo $[a, x]$, pues es continua y derivable como suma de funciones que lo son, y $R_n(a) = R_n'(a) = \ldots = R_n^{\lfloor n}(a) = 0$.

La aplicación del teorema conduce a

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n^{\lfloor n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

pero

$$R_n^{\lfloor n+1}(\xi) = f^{n+1}(\xi),$$

pues la derivada $(n+1)$-ésima de

$$[f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n]$$

es cero por ser polinomio de grado n; luego

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \xi \in (a, x)$$

El desarrollo de Taylor se puede escribir

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{\lfloor n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$R_n(x)$ se llama resto del desarrollo de Taylor.

La expresión hallada de $R_n(x)$ se conoce como resto de Lagrange.

Para cada x fijo resultará que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

(pues se sabe que $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$, para todo b)

Si las derivadas sucesivas de $f(x)$ están acotadas en un entorno $(a-r, a+r)$, o sea $|f^{\lfloor p}(x)| < M$ para $x \in (a-r, a+r)$ y cualquier orden p de derivación, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\lfloor n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^n = 0$$

En este supuesto, $f(x)$ puede representarse por la suma de infinitos sumandos.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Esta suma infinita se llama *serie de Taylor* para distinguirla del desarrollo finito. No tiene significado en sí sino como paso al límite cuando el número de sumandos crece

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n \right) =$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Los puntos en los que es válida la representación en serie de Taylor (o sea, en los que el resto tiende a cero para $n \to \infty$), forman un intervalo de centro a que se llama *intervalo de convergencia*, que puede ser como caso particular cero o toda la recta.

En el caso particular de que $a = 0$, el desarrollo de Taylor se llama de Mac Laurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{\lfloor n+1}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Después de todo esto, cabe preguntarse: ¿para qué sirve el desarrollo de Taylor? La respuesta es «para reducir las funciones a polinomios». Los polinomios son fácilmente calculables porque sólo intervienen las cuatro operaciones racionales. Gracias a estos desarrollos se calculan funciones más complicadas como senos, logaritmos, etc.

Incluimos a continuación tres ejercicios que informan y ayudan a fijar los conceptos precedentes.

1. La expresión más general del resto conocida como resto de Schlömilch es

$$R_n(x) = \frac{f^{\lfloor n}(\xi)}{p(n-1)!}(x-a)^p(x-\xi)^{n-p},$$

donde p es un número natural arbitrario.

De esta expresión se obtiene el resto de Lagrange haciendo $p = n$. Si hacemos $p = 1$, el resto que se obtiene es de Cauchy.

Si se hace

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x),$$

donde $R_n(x) = K_n(x)(x-a)^p$, deducir la expresión del resto de Schlömilch aplicando el teorema de Rolle a la función auxiliar de la variable z,

$$\Phi(z) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x-z) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n-1}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} + K_n(x)(x-z)^p$$

en el intervalo $[a, x]$.

2. Desarrollar en serie de Mac Laurin sen x, cos x, $\log_e(1+x)$ hasta el cuarto término.

3. Escribir el desarrollo de Taylor con el resto de Lagrange en función de Δx tal que $x = a + \Delta x$.

4.907. Aplicaciones del desarrollo de Taylor

I. *Para que dos funciones tengan un contacto de orden n en el punto* $x = a$ *es necesario y suficiente que* $f(a) = g(a)$; $f'(a) = g'(a)$; ...; $f^{\lfloor n}(a) = g^{\lfloor n}(a)$; $f^{\lfloor n+1}(a) \neq g^{\lfloor n+1}(a)$.

De esta propiedad hemos hecho uso en el capítulo anterior.

Demostración

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\frac{\Delta x}{1!} + f''(a)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots$$

$$g(a + \Delta x) = g(a) + g'(a)\frac{\Delta x}{1!} + g''(a)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots$$

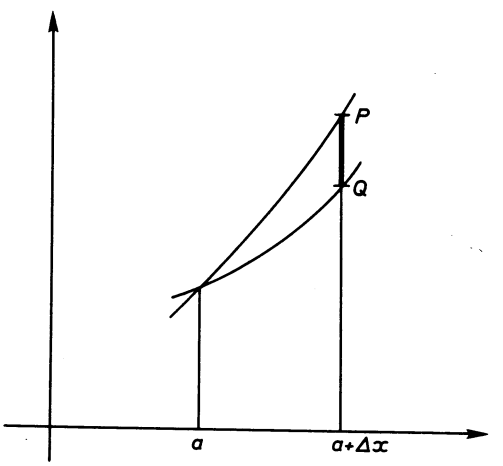


Fig. 4.130

$$|\bar{PQ}| = f(a + \Delta x) - g(a + \Delta x) = (f(a) - g(a)) + (f'(a) - g'(a))\frac{\Delta x}{1!} + \dots$$

$$\dots + (f^{\lfloor n}(a) - g^{\lfloor n}(a))\frac{(\Delta x)^n}{n!} + (f^{\lfloor n+1}(a) - g^{\lfloor n+1}(a))\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

Para que la menor potencia de (Δx) sea $(\Delta x)^{n+1}$, que es lo mismo que decir que $|PQ|$ es de orden $n + 1$, es necesario y suficiente que se verifiquen las condiciones del enunciado.

II. *Posición de una curva respecto a la tangente.*

Sea la curva de ecuación $y = f(x)$. Vamos a determinar la posición de la curva respecto de la tangente en el punto de abscisa $x = a$.

La ecuación de la curva será

$$y = f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots$$

La ecuación de la tangente es:

$$y_T = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!}$$

Si restamos, resulta

$$y - y_T = f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots$$

Puede ocurrir:

1.°) Si $f''(a) \neq 0$, sucede:

$$y - y_T \simeq f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}$$

para valores de x suficientemente próximos a a; luego

$$\text{signo } (y - y_T) = \text{signo } f''(a);$$

por tanto:

$f''(a) > 0 \Rightarrow y > y_T$

$f''(a) < 0 \Rightarrow y < y_T$

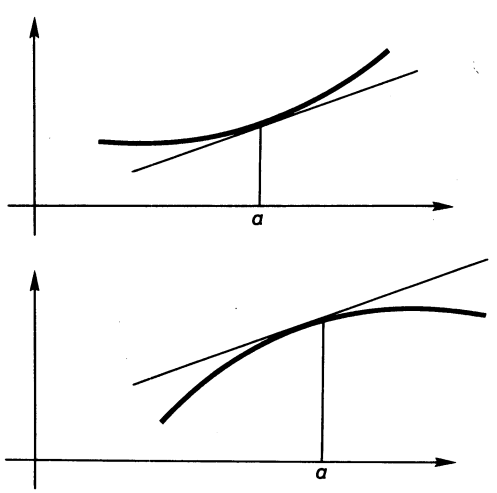
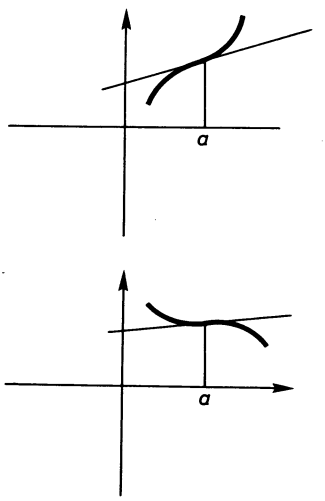


Fig. 4.131

2.°) Si $f''(a) = 0$ $f'''(a) \neq$, resulta

$$y - y_T \simeq f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!},$$

para valores de x suficientemente próximos a a; luego



$$f'''(a) > 0 \Rightarrow \begin{cases} y > y_T & \text{para} \quad x > a \\ y < y_T & \text{para} \quad x < a \end{cases}$$

$$f'''(a) < 0 \Rightarrow \begin{cases} y < y_T & \text{para} \quad x > a \\ y > y_T & \text{para} \quad x < a \end{cases}$$

Fig. 4.132

Si $f''(a) = f'''(a) = 0 \wedge f^{IV}(a) \neq 0$, el razonamiento es el mismo que el del caso primero.

Si $f''(a) = f'''(a) = f^{IV}(a) = 0$, el razonamiento es el mismo que el del caso segundo.

Todos los casos se reducen a los dos que han quedado establecidos.

Resumiendo:

— Si la primera derivada que no se anula a partir de la de segundo orden, es de *orden par*, la curva está del mismo lado respecto de la tangente en un cierto entorno del punto.

— Si la primera derivada no nula, a partir de la de segundo orden, es de *orden impar*, la curva atraviesa la tangente (inflexión).

4.908. Concavidad, convexidad e inflexiones

Consideremos un vector $\vec{v}$ del que sólo interesa la dirección y el sentido; el módulo es indiferente*.

* Aunque todavía no hemos hablado de vectores se supone que al lector le resulta familiar este concepto, al menos del estudio de la mecánica.

Vamos a estudiar los conceptos de concavidad y convexidad de una función, respecto de $\vec{v}$.

Se dice que la función $f(x)$ es *cóncava* en el punto $x = a$, respecto del valor $\vec{v}$, cuando en un cierto entorno de $x = a$, la curva está en el mismo semiplano que el vector respecto de la tangente.

NOTA. Se supone que el punto de aplicación del vector es el de la gráfica para $x = a$.

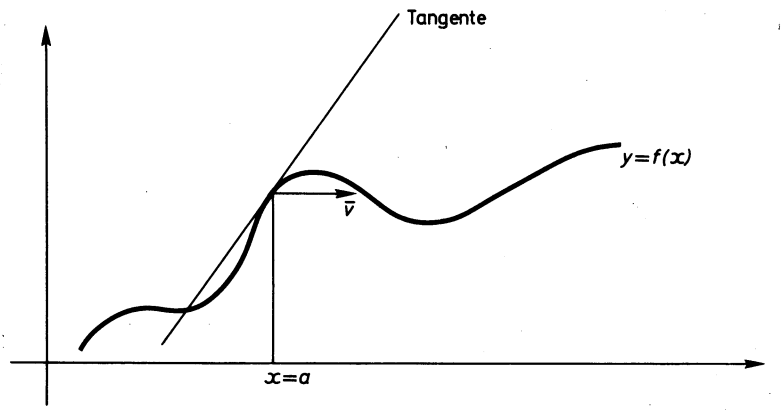


Fig. 4.133

La gráfica es cóncava en $x = a$ respecto de $\vec{v}$.

Se dice que la función $f(x)$ es *convexa* en el punto $x = a$, respecto del vector $\vec{v}$, cuando en un cierto entorno de $x = a$ la curva está en distinto semiplano que el vector $\vec{v}$, respecto de la tangente.

Gráfica convexa en $x = a$ respecto de $\vec{v}$.

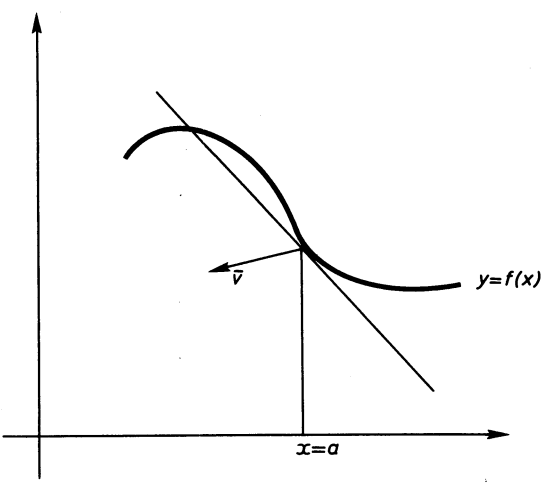
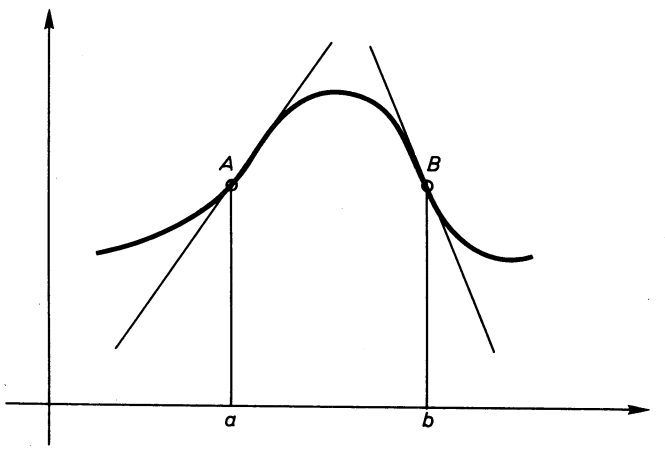


Fig. 4.134

Es costumbre tomar un vector $\vec{v}$, de una vez para siempre, definido así:
dirección = dirección del eje y
sentido = sentido positivo del eje y

De esta manera se habla de concavidad y convexidad, y no es necesario indicar respecto de qué vector.

Los puntos en los que la tangente atraviesa la curva, es decir, aquellos en los que cambia de concavidad a convexidad o viceversa, son unos puntos interesantes para el dibujo, llamados de *inflexión*.



Los puntos A y B son puntos de inflexión.

Fig. 4.135

Ejercicio

Señalar los trozos de la gráfica en los que es cóncava, convexa y sus inflexiones.

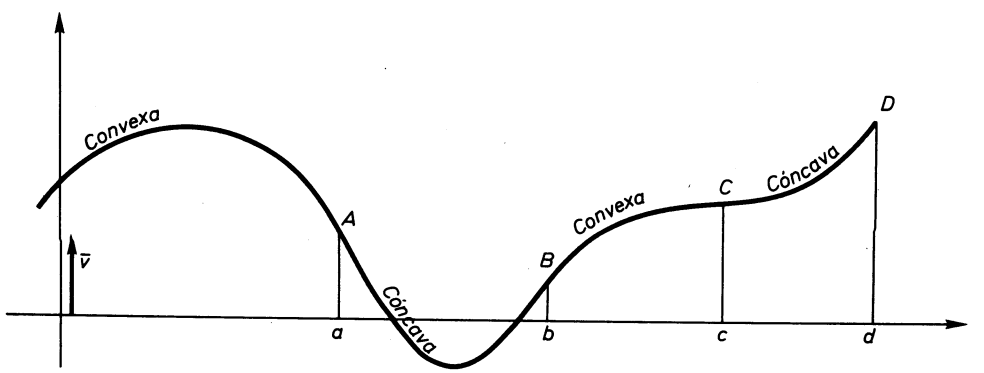


Fig. 4.136

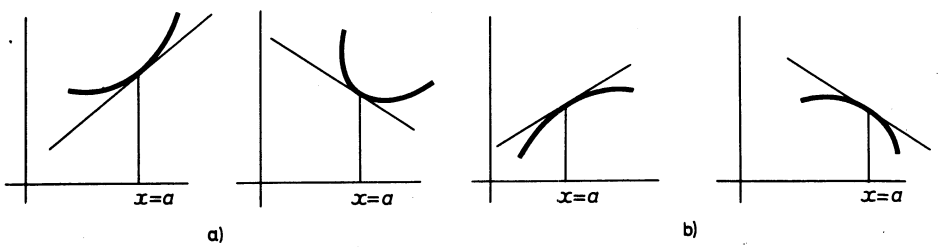
Son puntos de inflexión A, B y C.

Regla práctica

Para determinar si en $x = a$ la curva es cóncava, convexa, o tiene una inflexión, se hallan $f''(x)$, $f'''(x)$, ... y se estudian los valores que toman en $x = a$.

Recordando el estudio que hicimos de la posición de la curva respecto de la tangente resulta:

Si la primera derivada que no se anula (a partir de la de segunda orden) es de orden par, o sea $f^{\underline{|2K}}(a) \neq 0$ puede ocurrir:



$f^{\underline{|2K}}(a) > 0$ *cóncava* $f^{\underline{|2K}}(a) < 0$ *convexa* Fig. 4.137

Si la primera derivada que no se anula (a partir de la de segundo orden) es de orden impar, o sea $f^{\underline{|2K+1}}(a) \neq 0$, vimos que la tangente atraviesa la curva y pueden ocurrir dos casos:

$f^{\underline{|2K+1}}(a) > 0$
inflexión

$f^{\underline{|K+1}}(a) < 0$
inflexión

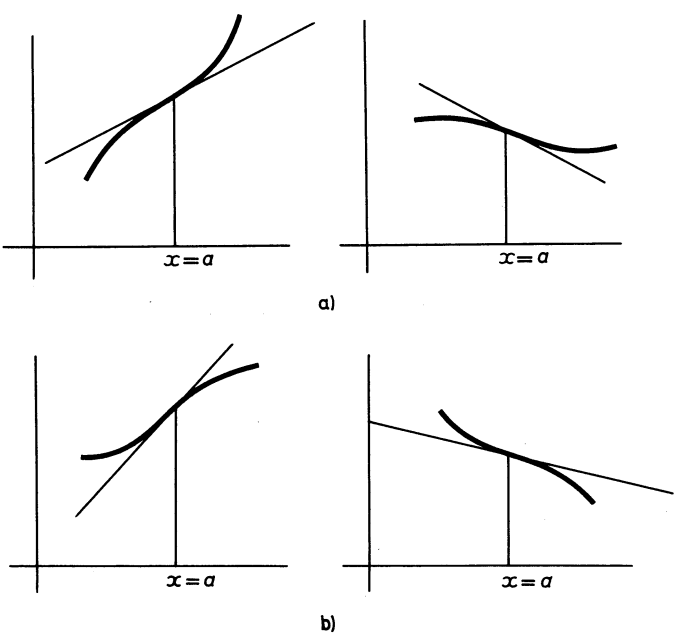


Fig. 4.138

Desarrollamos a continuación tres ejercicios, con el fin de fijar los conceptos que se vienen estudiando.

Ejercicio 1

Determínense los puntos de inflexión de la curva

$$y = 2x^3 - 5x^2 + 3$$
$$y' = 6x^2 - 10x; \qquad y'' = 12x - 10; \qquad y''' = 12$$
$$y'' = 12x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

La primera derivada (a partir de la de segundo orden) que no se anula en $\frac{5}{6}$ es $y''' = 12 \neq 0$, luego en $\frac{5}{6}$ *hay una inflexión*, y es la única pues no hay ningún otro valor de x que anula a y''.

En $x = \frac{5}{6}$ $\qquad y' = -\frac{25}{6}$

$$y = -\frac{125}{27}$$

$$y''' > 0$$

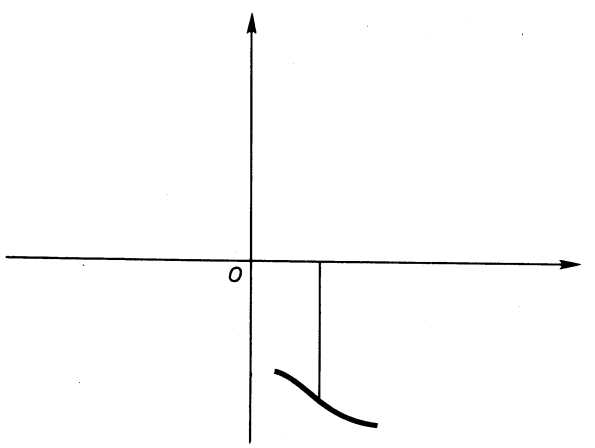


Fig. 4.139

Ejercicio 2

Dada la curva $y = x^3 - x^2 + 3$, averígüese si en $x = 2$ es cóncava o convexa, dibujando la posición de la curva respecto de la tangente

$$y' = 3x^2 - 2x; \qquad y'' = 6x - 2; \qquad y''' = 6; \qquad y'''' = 0$$

Para $x = 2$ $y'' = 10 \neq 0$. Como $y'' > 0$ es *cóncava*.

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 7 \\ y' = 8 \end{cases}$$

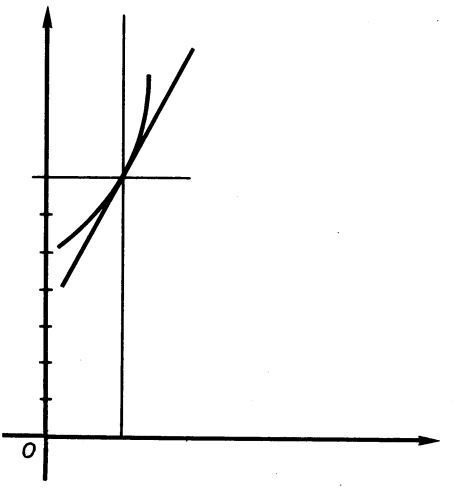


Fig. 4.140

Ejercicio 3

Determínense los puntos en los que la función $y = Lx$ es creciente y decreciente.

$y' = \frac{1}{x}$. Como la función sólo está definida para $x > 0$ resultará $y' > 0$ siempre; luego la función es creciente, para todo valor de x.

4.909. Estudio de la gráfica de una función derivable

Para estudiar la gráfica de una función derivable no hay un orden de actuación inamovible, sino que cada función particular decidirá los elementos a determinar y el procedimiento a seguir.

A título orientativo, indicamos:

— Un primer dato que se dispone es la continuidad, pues ya dijimos que toda función derivable es continua.

— Se deben estudiar los puntos en los que las derivadas se anulan, que como se sabe, pueden ser máximos, mínimos o puntos de inflexión con tangente horizontal.

— Se determinarán aquellos puntos de inflexión que no tienen tangente horizontal.

— En todos los puntos especiales que hemos indicado se determinará la posición de la curva respecto de la tangente.

— Intervalos en los que la función es creciente o decreciente, según el signo de la derivada.
— Concavidad y convexidad.
— Puntos de discontinuidad de la derivada que corresponden a puntos angulosos.

Además se tendrán en cuenta:

1.º) Simetrías; 2.°) puntos de intersección con los ejes; 3.º) asíntotas y ramas parabólicas; 4.°) tabla de valores.

Ejemplo

Estudiar la gráfica de $y = x^3 - 2x^2 + 4$

$$y' = 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0; & y = 4 \\ x = \dfrac{4}{3} & y = 4 + \dfrac{16}{9}\left(\dfrac{4}{3} - 2\right) \simeq 2{,}9 \end{cases}$$

$$y'' = 6x - 4 \quad \text{para } x = 0 \quad y'' < 0 \text{ máximo}$$

$$\text{para } x = \frac{4}{3} \quad y'' > 0 \text{ mínimo}$$

$$y'' = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad y''' = 6 \neq 0$$

luego en $x = \dfrac{2}{3}$ hay una inflexión.

$$x = \frac{2}{3} \quad y \simeq 1{,}7 \quad y' = -\frac{5}{3}$$

Con estos datos se puede encajar la gráfica. Si se quiere gran precisión se dibuja en mayor escala en papel milimetrado, y determinando un cuadro de valores. Además se determinarían todos los elementos que hemos indicado anteriormente.

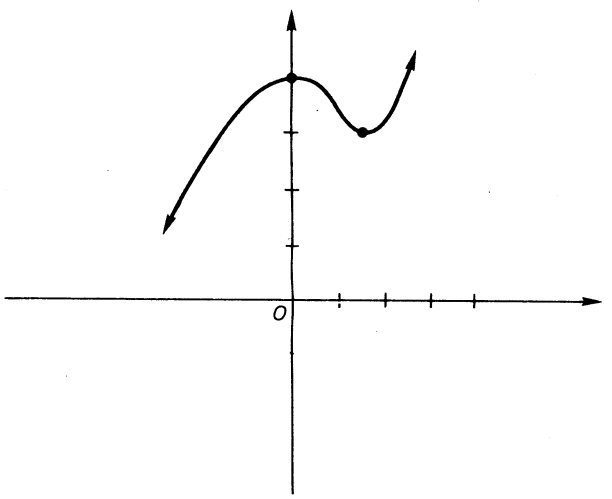


Fig. 4.141

4.910. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.9100.
Hállense el máximo y el mínimo absolutos de $y = e^x$ en el intervalo $[2, 3]$.

4.9101.
Hállense el máximo y el mínimo absolutos de $y = 3x^3 - 6x$ en el intervalo $[1, 2]$.

4.9102.
Hállense los máximos, mínimos e inflexiones de la función $y = x^3 + 4x - 5$.

4.9103.
Determínense los intervalos en los que es creciente y decreciente la función $y = \frac{1}{x - 2}$.

4.9104.
Determínense los intervalos en los que es creciente y decreciente la función $y = 2x^2 + 5x - 3$.

4.9105.
Desarróllense, por Mac Laurin, determinando los seis primeros términos, las siguientes funciones:

$$y = e^x; \quad y = \operatorname{sen} x; \quad y = \cos x; \quad y = \operatorname{Ch} x$$

4.9106.
Determínese la posición de la curva respecto de la tangente en $x = 4$, en la función $y = Lx$.

4.9107.
Hállense los puntos de inflexión de la curva $y = x^4 - 2x^2 + 5$.

4.9108.
Hállense los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = x^3 - 6x^2 + 5$.

4.9109.
Determínese la posición de la curva con relación a la tangente en $x = -1$.

4.10

Integrales indefinidas

4.1001. Definición de integral indefinida o función primitiva

4.1002. La función primitiva no es única

4.1003. Funciones integrables

4.1004. Integrales inmediatas

4.1005. Funciones hiperbólicas

4.1006. Derivación e integración de funciones hiperbólicas e inversas

4.1007. Carácter lineal de la integración

4.1008. Método de sustitución

4.1009. Integración por partes

4.1010. Integracion por reducción

4.1011. Integración de funciones racionales

4.1012. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.10

Integrales indefinidas

4.1001. *Definición de integral indefinida o función primitiva*

Dada una función $f(x)$, se llama *integral indefinida* de $f(x)$ a una función $F(x)$ tal que se verifica que la derivada de $F(x)$ es igual a $f(x)$; o sea:

$$F'(x) = f(x)$$

La integral indefinida de $f(x)$ también recibe el nombre de *función primitiva* de $f(x)$, y se representa

$$\int f(x)\,dx$$

Se tiene, pues, la siguiente equivalencia de definición

$$\int f(x)\,dx = F(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

La integración es la operación inversa de la derivación.

4.1002. *La función primitiva no es única*

Si $\int f(x)\,dx = F(x)$, también se verifica que $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, en donde C es una constante, pues

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) + C\right] = \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

La interpretación geométrica de este resultado es fácil:

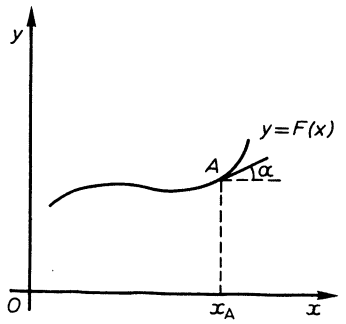


Fig. 4.142

En cada punto A de abscisa x_A, la tangente a la curva $y = F(x)$ tiene de pendiente $F'(x_A) = f(x_A) = \text{tg}\,\alpha$. (Véase figura 4.142.)

Si se considera la función trasladada de $F(x)$, en la dirección del eje y, una magnitud C, resulta $y = F(x) + C$.

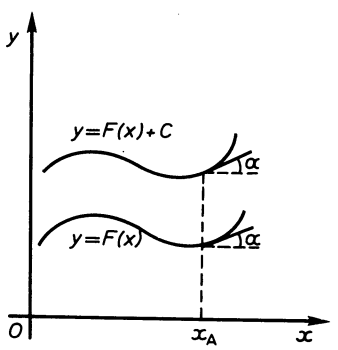


Fig. 4.143

El punto de abscisa x_A, en $y = F(x) + C$, tendrá una tangente paralela a la tangente en $y = F(x)$; luego, evidentemente, sus derivadas son iguales, pues ambas lo son a $\text{tg}\,\alpha$.

En resumen: toda función tiene infinitas funciones primitivas. Dos cualesquiera de ellas difieren en una constante.

4.1003. *Funciones integrables*

La integración indefinida o cálculo de primitivas tiene relación, o mejor dicho, pertenece al cálculo diferencial (diferenciación y derivación), según la misma definición.

Al estudiar la derivada, se vio que las funciones elementales: polinomios, funciones racionales, funciones irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonomé-

tricas, eran derivables; es más: se llegaba a unas reglas de derivación que permitían, mediante la aplicación de la regla de derivación de una función compuesta (función de función), calcular la derivada de cualquier función «ordinaria». Aquí se entiende por función «ordinaria» una función combinación de las operaciones racionales, la radicación, la exponenciación, logaritmación o las operaciones trigonométricas.

Ejemplo

$$y = \operatorname{sen} \sqrt{x^2 - 3^x L \operatorname{tg} x}$$

$$y' = \cos \sqrt{x^2 - 3^x L \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3^x L \operatorname{tg} x}} \left[2x - \left(3^x L\, 3 \cdot L \operatorname{tg} x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}\right)\right]$$

Decimos que una función $f(x)$ es *integrable*, si existe una función ordinaria, es decir, compuesta de las funciones elementales, tal que su derivada es $f(x)$.

La derivación de cualquier función ordinaria es sencilla y fácil de establecer. Solamente en algunos puntos excepcionales puede no existir la derivada o es necesario recurrir a la definición, pues las reglas de derivación no son aplicables.

En la integración, sin embargo, ocurre lo contrario, a saber, que la excepción es encontrar una función ordinaria cuya derivada sea una función dada, aunque ésta sea muy sencilla, como puede ser

$$y = \sqrt{5x^3 + 3x^2 - 7x + 4},$$

que no es integrable; es decir:

$$\int \sqrt{5x^3 + 3x^2 - 7x + 4}\, dx$$

no existe.

Cuando en el capítulo siguiente se estudie la integración definida de Riemann, ya se verá que integrales del tipo de la anterior definen ellas mismas una función, aunque ésta no sea función «ordinaria».

La integración enriquece el Análisis matemático, ya que aporta funciones que pueden representarse en la forma

$$y = \int \sqrt{5x^3 + 3x^2 - 7x + 4}\, dx,$$

y aproximarse suficientemente mediante diversos métodos de cálculo, acotando errores.

Las funciones integrables unas son inmediatas y otras se pueden calcular, aplicando ciertos métodos de integración, que las reducen a inmediatas. Esto es lo que se desarrolla en los siguientes números.

4.1004. *Integrales inmediatas*

Las integrales que escribimos a continuación son inmediatas, pues basta con aplicar las reglas de derivación a los segundos miembros, para justificarlas.

$$a)\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad f)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$b)\ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{La} + C \qquad g)\ \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$c)\ \int \frac{dx}{x} = Lx + C \qquad h)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$d)\ \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad i)\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

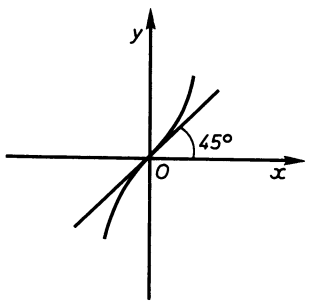
$$e)\ \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

4.1005. *Funciones hiperbólicas*

A partir de la función exponencial e^x y de su inversa $1/e^x = e^{-x}$, se definen unas funciones que tienen cierto interés, conocidas con el nombre de *funciones hiperbólicas*.

A continuación se establecen las definiciones y sus gráficas correspondientes.

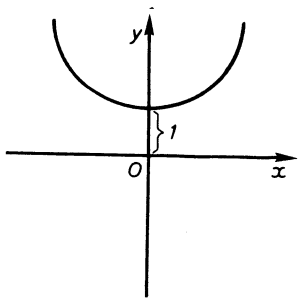
Seno hiperbólico



$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Fig. 4.144

Coseno hiperbólico



$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Fig. 4.145

Tangente hiperbólica

$$\operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

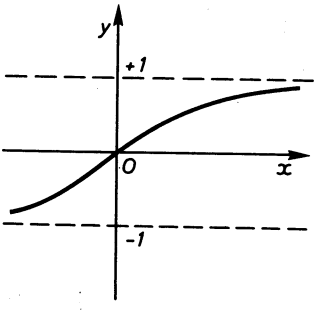


Fig. 4.146

Cotangente hiperbólica

$$\operatorname{Cth} x = \frac{\operatorname{Ch} x}{\operatorname{Sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

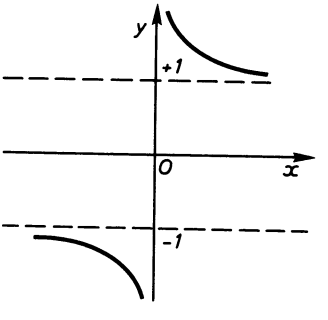


Fig. 4.147

Secante hiperbólica

$$\operatorname{Sech} x = \frac{1}{\operatorname{Ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

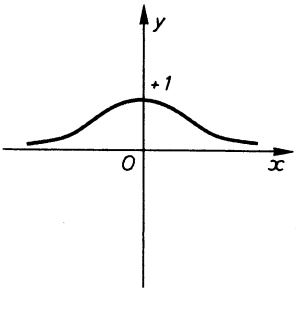
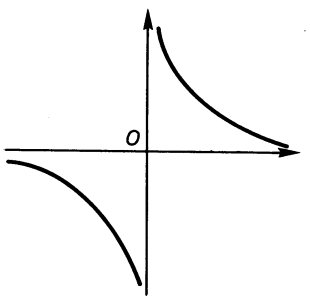


Fig. 4.148

Cosecante hiperbólica



$$\text{Cosech } x = \frac{1}{\text{Sh } x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Fig. 4.149

Como se habrá observado, definidos el seno y el coseno hiperbólicos, las demás funciones son una consecuencia, a semejanza con lo que ocurre en las funciones trigonométricas o funciones circulares.

Es fácil comprobar que se verifica la relación

$$\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1$$

Las curvas de la forma $y = a \cdot \text{Ch} \frac{x}{a}$, donde a es un parámetro, tienen una importancia excepcional, pues son las curvas que forman los cables flexibles (más exactamente, cadenas), suspendidos en sus extremos. Reciben el nombre de *catenarias*.

Razón de la definición de seno y coseno hiperbólicos

La circunferencia es un caso particular de elipse: es aquella elipse que tiene dos ejes iguales, o sea, $a = b$.

Análogamente, la hipérbola equilátera es un caso particular de hipérbola: es aquella hipérbola que tiene los dos ejes iguales.

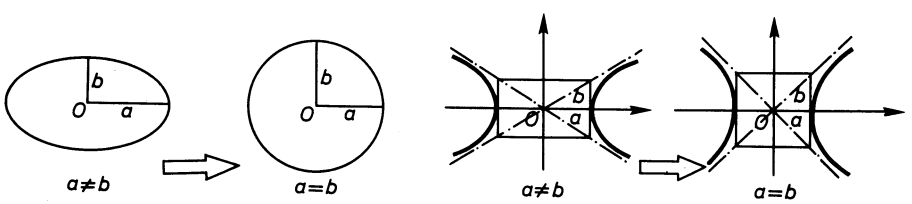


Fig. 4.150

Las funciones trigonométricas seno y coseno se pueden definir así: (cos x, sen x) son las coordenadas del punto P situado sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, tal que el área del sector circular rayado es

$$0AP = \frac{1}{2}x$$

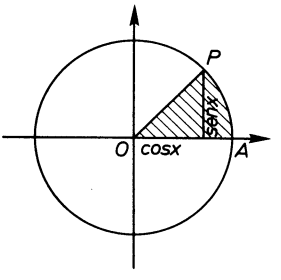


Fig. 4.151

De manera análoga, se pueden definir el seno y coseno hiperbólicos respecto a la hipérbola equilátera:

(Ch x, Sh x) son las coordenadas del punto P situado sobre la hipérbola equilatera $x^2 - y^2 = 1$, tal que el área del sector hipérbolico rayado es

$$0AP = \frac{1}{2}x$$

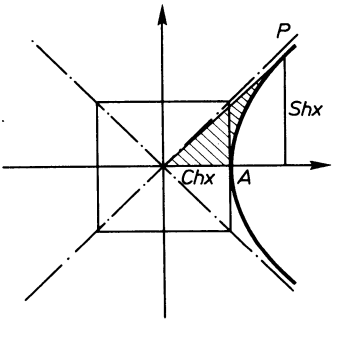


Fig. 4.152

4.1006. *Derivación e integración de funciones hiperbólicas e inversas*

De las mismas definiciones de funciones hiperbólicas resulta:

$$y = \operatorname{Sh} x \Rightarrow y' = \operatorname{Ch} x \quad ; \quad y = \operatorname{Ch} x \Rightarrow y' = \operatorname{Sh} x$$

$$y = \operatorname{Th} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x} \quad ; \quad y = \operatorname{Cth} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\operatorname{Sh}^2 x}$$

Las funciones inversas de las hiperbólicas se expresan anteponiendo a los nombres de las direcciones la palabra «argumento»

$$y = \text{arg Sh } x \Leftrightarrow x = \text{Sh } y$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy},$$

y las derivadas que se han escrito, resulta:

1) $y = \text{arg Sh } x \; (x = \text{Sh } y) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. En efecto.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\text{Ch } y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

2) $y = \text{arg Ch } x \; (x = \text{Ch } y) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. En efecto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\text{Sh } y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

3) $y = \text{arg Th } x \; (x = \text{Th } y) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 - x^2}$. Así es, ya que

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1/\text{Ch}^2 y} = \text{Ch}^2 y = \frac{\text{Ch}^2 y}{\text{Ch}^2 y - \text{Sh}^2 y} = \frac{1}{1 - \text{Th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Forman parte de las integrales inmediatas las siguientes:

j) $\displaystyle\int \text{Sh } x \, dx = \text{Ch } x + C$

k) $\displaystyle\int \text{Ch } x \, dx = \text{Sh } x + C$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{Ch}^2 x} = \text{Th } x + C$

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{Sh}^2 x} = -\text{Cth } x + C$

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \text{arg Sh } x + C$

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \text{arg Ch } x + C$

q) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - x^2} = \text{arg Th } x + C$

4.1007. *Carácter lineal de la integración*

Al establecer que la integración es una operación lineal, se quiere decir:

1.º que la integral de una suma de funciones integrables es igual a la suma de las integrales de los sumandos;
2.º que la integral del producto de una constante por una función integrable es igual a la constante por la integral de la función.

Veamos que, efectivamente, ocurre así:

1.º
$$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx,$$
pues
$$\frac{d}{dx}\left[\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\int f_1(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int f_2(x)\,dx = f_1(x) + f_2(x)$$

2.º $\int k \cdot f_1(x)\,dx = k\int f_1(x)\,dx$, ya que
$$\frac{d}{dx}\left[k\int f_1(x)\,dx\right] = k\,\frac{d}{dx}\int f_1(x)\,dx = k \cdot f_1(x)$$

Como aplicación se puede calcular la integral de un polinomio.

4.1008. *Método de sustitución*

Considérese $\int f(x)\,dx$ y supóngase que $x = \varphi(t)$ es una función tal que, si se despeja la t, resulta $t = g(x)$.

Es claro que
$$1 = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \varphi'(t) \cdot g'(x)$$

Sustituyendo x y dx por sus expresiones en función de t, considerando $f(x)\,dx$ como producto, se obtiene una nueva integral
$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$
Puede ocurrir que esta integral sea fácil de calcular, mientras que $\int f(x)\,dx$ no lo fuera.

El método de integración por sustitución expresa que

> si se verifica $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(t)$, resulta que
> $$\int f(x)\,dx = F(g(x))$$

Veamos:
$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = \frac{dF}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dF}{dt} \cdot g'(x);$$

pero como

$$\int f(\varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt = F(t),$$

resulta

$$\frac{dF}{dt} = f(\varphi(t)\,\varphi'(t);$$

luego

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(\varphi(t))\underbrace{\varphi'(t)\cdot g'(x)}_{\text{//}\ 1} = f(\varphi(t)) = f(x), \qquad \text{c.q.d.}$$

Ejercicio

Calcular las siguientes integrales por el método de sustitución, efectuando los cambios de variable que se indican.

1) $\int \frac{Lx}{x}\,dx$; cambio, $x = e^t \Leftrightarrow t = Lx$

2) $\int \frac{(\text{arc sen } x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; cambio, $x = \text{sen } t \Leftrightarrow t = \text{arc sen } x$

3) $\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^4 x}\,dx$; cambio, $x = \text{arc sen } t \Leftrightarrow t = \text{sen } x$

4) $\int \text{tg } x\,dx$; cambio, $x = \text{arc cos } t \Leftrightarrow t = \cos x$

4.1009. *Integración por partes*

Si u y v son funciones de x, sucede que

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v';$$

luego

$$\int (u\cdot v)'\,dx = \int (v\cdot u' + u\cdot v')\,dx.$$

Usando del carácter lineal de la integración,

$$u\cdot v = \int v\cdot u'\,dx + \int u\cdot v'\,dx$$

El método de sustitución nos permite escribir

$$u\cdot v = \quad v\,du + \int u\,dv$$

Basta despejar, para que resulte

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

que es la fórmula de la integración por partes.

Conviene estudiar varios ejemplos:

1. $\int Lx\,dx = x \cdot Lx - \int x \cdot d(Lx) = x \cdot Lx - \int x \frac{1}{x}\,dx = x \cdot Lx - x + C$

2. $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int x \cdot d(\operatorname{arc\,tg} x) = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} L(1+x^2) + C$$

3. $\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x - \int x \cdot d(\operatorname{arc\,sen} x) = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x -$

$$- \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x -$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$$

4.1010. *Integración por reducción*

Parece que la mejor forma de entender este método es estudiar un ejemplo concreto.

Se quiere calcular la integral $\int (Lx)^m\,dx = I_m$.

Aplicando la fórmula de integración por partes, resulta:

$$I_m = \int (Lx)^m\,dx = x \cdot (Lx)^m - \int x \cdot m(Lx)^{m-1} \cdot \frac{1}{x}\,dx;$$

es decir, queda

$$I_m = x \cdot (Lx)^m - m \cdot I_{m-1},$$

ley recurrente que relaciona I_m con I_{m-1}.

Si se desea, por ejemplo, calcular

$$I_3 = \int (Lx)^3\,dx,$$

basta aplicar la relación anterior para $m = 3, 2$; o sea:

$$I_3 = x \cdot (Lx)^3 - 3I_2$$
$$I_2 = x \cdot (Lx)^2 - 2I_1 \Rightarrow I_3 = x \cdot (Lx)^3 - 3x(Lx)^2 + 6I_1$$
$$I_1 = \int Lx\,dx = x \cdot Lx - \int x \frac{1}{x}\,dx = x \cdot Lx - x;$$

luego

$$I_3 = x \cdot (Lx)^3 - 3x \cdot (Lx)^2 + 6(x \cdot Lx - x) + C$$

4.1011. *Integración de funciones racionales*

La idea esencial de este apartado es que toda función racional, es decir, todo cociente de dos polinomios, es integrable, en el sentido del número 4.1003. Sea

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional. Si el grado del polinomio $P(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$, se efectúa la división y se puede escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{H(x)}{Q(x)},$$

donde grado $H(x)$ < grado $Q(x)$; y resulta:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{H(x)}{Q(x)}\,dx$$

Como $C(x)$ es un polinomio, sucede que su integral es inmediata. El problema queda, pues, reducido a determinar

$$\int \frac{H(x)}{Q(x)}\,dx$$

Se resuelve fácilmente, si se conocen las raíces del denominador. El cálculo de las raíces de un polinomio hoy no tiene dificultad, ya que se pueden obtener con aproximación más que suficiente, mediante un computador.

El método de cálculo de la integral se basa en descomponer la función racional en fracciones sencillas, cuya integración sea inmediata.

Recuérdese que si un polinomio $P(x)$ tiene las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, el polinomio puede escribirse en forma factorial

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(\ldots)(x - \alpha_n).$$

Precisamente, para la descomposición factorial es para lo que se necesitan las raíces del denominador. Veamos la forma de proceder, cuando el denominador ya se ha escrito en forma factorial.

Ejemplo

Sea

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2(x + 2)((x - 3)^2 + 2^2)}$$

El denominador es un polinomio que tiene las raíces siguientes:

una raíz doble: 1
una raíz sencilla: -2
dos raíces imaginarias conjugadas sencillas: $3 \pm 2i$

La fracción se descompone de manera única en la forma

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2(x + 2)((x - 3)^2 + 2^2)} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2} + \frac{Mx + N}{(x - 3)^2 + 2^2}$$

donde A, B, C, M y N son constantes perfectamente determinadas por la función racional.

Una vez que se han determinado dichas constantes, por el procedimiento que luego se expone, la integral está calculada, pues

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(x+2)((x-3)^2+2^2)}\,dx = A\int \frac{dx}{(x-1)^2} + B\int \frac{dx}{x-1} + C\int \frac{dx}{x+2} +$$

$$+ \int \frac{Mx + N}{(x-3)^2 + 2^2}\,dx = A\,\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + B\,L(x-1) + C\,L(x+2) +$$

$$+ \frac{M}{2}\,L[(x-3)^2 + 2^2] + \frac{M\cdot 3 + N}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x-3}{2} + \text{Cte.}$$

¿Qué se ha necesitado para calcular la integral de una función racional? Hacer uso de las integrales inmediatas

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = L(x-a) + C$$

$$\int \frac{Mx + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\,dx = \frac{M}{2}\,L((x-\alpha)^2 + \beta^2) + \frac{M\alpha + N}{\beta}\,\text{arc tg}\,\frac{x-\alpha}{\beta}$$

La última, aunque a primera vista un poco complicada, es fácil de recordar y deducir, pues

$$\frac{Mx + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{M}{2}\,\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{M\alpha + N}{\beta}\,\frac{1/\beta}{\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2 + 1},$$

y basta integrar ambos miembros.

La integración se complica cuando el polinomio denominador tiene raíces imaginarias conjugadas múltiples. La descomposición es análoga a la que se indica en el siguiente

Ejemplo

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{(x-2)^3((x-4)^2 + 5)^2}$$

El denominador es un polinomio que tiene las raíces siguientes:

raíz real triple: 2
raíces imaginarias conjugadas dobles: $4 \pm 5i$

La fracción polinómica se descompone de manera única en la forma

$$\frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Mx + N}{((x-4)^2 + 5^2)^2} + \frac{M_1 x + N_1}{(x-4)^2 + 5^2}$$

Al integrar, aparece una integral no inmediata,

$$\int \frac{Mx + N}{((x-4)^2 + 5^2)^2}\, dx.$$

En general, no lo son las del tipo

$$\int \frac{Mx + N}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p}\, dx = \frac{M}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p}\, dx + (M\alpha + N)\int$$

$$\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p} = \frac{M}{2}\,\frac{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{-p+1}}{-p+1} + (M\alpha + N)I_p,$$

donde

$$I_p = \frac{dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p}$$

ha de calcularse por el método de reducción:

$$I_p = \int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{\beta^2 + (x-\alpha)^2 - (x-\alpha)^2}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\beta^2} I_{p-1} - \frac{1}{\beta^2} \int \frac{(x-\alpha)^2\, dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p}.$$

La integral

$$\int \frac{(x-\alpha)^2\, dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p},$$

haciendo el cambio $x - \alpha = t$, se reduce a

$$\int \frac{t^2\, dt}{[t^2 + \beta^2]^p} = \frac{1}{2}\int \frac{t\, dt^2}{[t^2 + \beta^2]^p} = \frac{1}{2}\int t\, d\frac{(t^2 + \beta^2)^{-p+1}}{-p+1} = \frac{1}{2}\left[t \cdot \frac{(t^2 + \beta^2)^{-p+1}}{-p+1} - \right.$$

$$\left. - \int \frac{(t^2 + \beta^2)^{-p+1}}{-p+1}\, dt \right]$$

Deshaciendo el cambio,

$$= \frac{1}{2(1-p)}\left[\frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{p-1}} - I_{p-1}\right]$$

Sustituyendo en la expresión de I_p,

$$\beta^2 I_p = I_{p-1} - \frac{1}{2(1-p)}\left[\frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{p-1}} - I_{p-1}\right]$$

Agrupando, queda la ley recurrente

$$\beta^2 I_p = \frac{3-2p}{2-2p} I_{p-1} - \frac{x-\alpha}{2(1-p)[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{p-1}}$$

La fórmula conseguida no se deduce en cada caso particular, sino «se busca el libro» y se aplica.

Las raíces imaginarias múltiples del polinomio denominador son las que realmente complican el cálculo de integrales.

Para que el problema de la integración de funciones racionales esté resuelto, desde el punto de vista teórico, ha de justificar la descomposición en fracciones simples y establecer un método de cálculo de constantes. Lo primero no lo haremos, puesto que ocuparía demasiado espacio y no es problema de integración, que es de lo que se trata en el presente capítulo (si se desea, puede verse el desarrollo completo, por ejemplo, en la séptima lección de Cálculo Integral del profesor Puig Adam).

Mediante dos ejemplos, se desarrolla la forma de hallar el valor de las constantes.

Ejemplo 1

(Sin raíces imaginarias.)

$$\frac{3x^2 - 2x + 4}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2}$$

Si se multiplican ambos miembros por $(x-1)^3$, resulta:

$$\frac{3x^2 - 2x + 4}{x+2} = A + B(x-1) + C(x-1)^2 + D\frac{(x-1)^3}{x+2}$$

Haciendo $x = 1$ en ambos miembros,

$$\left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{x+2}\right]_{x=1} = \frac{5}{3} = A$$

Se deriva la expresión y se hace $x = 1$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{x+2}\right]_{x=1} = \left[\frac{3x^2 + 12x - 8}{(x+2)^2}\right]_{x=1} = \frac{7}{9} = B \cdot 1!$$

Volviendo a derivar y haciendo $x = 1$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{x+2}\right]_{x=1} = \left[\frac{(x+2)^2(6x+12) - (3x^2 + 12x - 8)2(x+2)}{(x+2)^4}\right]_{x=1} =$$
$$= \frac{40}{27} = C \cdot 2!$$

Resumiendo:

$$A = \left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{x+2}\right]_{x=1} = \frac{5}{3}$$

$$B = \frac{1}{1!}\frac{d}{dx}\left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{x + 2}\right]_{x=1} = \frac{7}{9}$$

$$C = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{x + 2}\right]_{x=1} = \frac{20}{27}$$

Análogamente,

$$D = \left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{(x - 1)^3}\right]_{x=-2} = -\frac{20}{27}$$

Ejemplo 2

(Con raíces imaginarias.)

$$\frac{3x - 2}{[(x - 1)^2 + 3^2](x - 1)} = \frac{Mx + N}{(x - 1)^2 + 3^2} + \frac{A}{x - 1}$$

A se obtiene según hemos visto en el primer ejemplo.

$$A = \left[\frac{3x - 2}{(x - 1)^2 + 3^2}\right]_{x=1} = \frac{1}{9}$$

Se multiplican por $((x - 1)^2 + 3^2)$ ambos miembros

$$\frac{3x - 2}{x - 1} = Mx + N + [(x - 1)^2 + 3^2]\frac{A}{x - 1}$$

Haciendo $x = 1 \pm 3i$,

$$\left(\frac{3x - 2}{x - 1}\right)_{x=1+3i} = \frac{1 + 9i}{3i} = M(1 + 3i) + N = M + N + 3Mi$$

$$1 + 9i = 3(M + N)i - 9M$$

Igualando partes reales e imaginarias, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -9M \\ 9 = 3(M + N) \end{array}\right\} \Rightarrow M = -\frac{1}{9} \quad ; \quad N = \frac{28}{9}$$

Se proponen dos ejercicios para completar el aprendizaje inicial.

Ejercicio 1

Demostrar que $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^5}}{x + 2}\,dx$ se convierte en integral racional mediante el cambio de variable $x = t^6$.

Ejercicio 2

Generalizar al caso $\int R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}})\,dx$, haciendo el cambio $x = t^h$, con h = m.c.m. (n, q, s). (R indica función racional.)

4.1012. *Aplicabilidad. Automatismos y destrezas*

Calcúlense las siguientes sesenta integrales:

4.10120.

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx;\ \int \operatorname{sen} x\, L(\cos x)\,dx;\ \int \operatorname{cotg} x\,dx;\ \int \operatorname{sen}^4 x\,dx;\ \int \frac{dx}{x^2-5}$$

$$\int \frac{\operatorname{arg\,Sh} x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

4.10121.

$$\int \frac{x-7}{x^2+5}\,dx;\ \int \frac{3x}{2x^2+1}\,dx;\ \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2}\,dx;\ \int \frac{3x-2}{(x-4)(x^2+1)}\,dx;$$

$$\int \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{(2x^2-5)^2}};\ \int \frac{1/x-1}{Lx-x}\,dx$$

4.10122.

$$\int (2x^{1/2}+3)^3\,dx;\quad \int \operatorname{sen}^9 x\,dx;\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}};\ \int \frac{3x-7}{x^2-3x+2}\,dx;\ \int \frac{5x\,dx}{x^2+x+2};$$

$$\int \frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2(x+3)}\,dx$$

4.10123.

$$\int \frac{x^5+2x^4-x^2+6}{(x-2)^2(x+1)}\,dx;\ \int (\operatorname{sen} x-\cos x)^2\,dx;\ \int (x^{1/2}-1)^3\,dx;\ \int \frac{Lx}{x}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+7};\ \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$$

4.10124.

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2+4}\,dx;\ \int \frac{x+3}{x^2-2x+2}\,dx;\ \int \left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 dx;\ \int \sqrt[3]{(mt+n)^5}\,dt$$

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{d\omega}{\cos^2(2\omega-\pi/2)};\ \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sen} y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

4.10125.

$$\int_0^{1/3} \frac{dx}{1+(3x-1)^2};\ \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^5\varphi}\,d\varphi;\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}};\ \int x^m\,Lx\,dx;$$

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx;\ \int_0^{\pi/6} \operatorname{tg} x\,dx$$

4.10126.

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,sen} x\,dx;\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}};\ \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2+x^2}};\ \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{1/2}};\ \int \frac{dx}{x^2 \pm a^2};$$
$$\int x \cdot a^{kx}\,dx$$

4.10127.

$$\int (\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg} x + 3)\frac{1}{\cos^2 x}\,dx;\ \int \operatorname{sen}^3 x\,dx;\ \int \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx;$$
$$\int \cos^{2n+1} x\,dx;\ \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx;\ \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}}$$

4.10128.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} x};\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 \pm x^2}};\ \int \operatorname{Th} x\,dx;\ \int (Lx)^n\,dx;\ \int x^m a^x\,dx;\ \int x \cos x\,dx$$

4.10129.

$$\frac{x\,dx}{\cos^2 3x};\ \int \operatorname{arc\,cos} 2x\,dx;\ \int x^2\sqrt{1-x}\,dx;\ \int x \cdot \operatorname{arc\,tg} x\,dx;\ \int \operatorname{sen}(Lx)\,dx;$$
$$\int x^2 e^{-3x}\,dx$$

4.11

Area. Integral definida. Aplicaciones

4.1101. Introducción

4.1102. Medida de áreas de regiones poligonales

4.1103. El problema general del área

4.1104. Definición de área

4.11041. *Definición de área según Jordan*
4.11042. *Definición de área según Lebesgue*

4.1105. Integral definida

4.1106. Integración de Riemann de una función continua, positiva y monótona

4.1107. Integración de una función monótona, continua y negativa

4.1108. Integración de una función continua

4.1109. Teorema de Barrow

4.1110. Funciones definidas por integrales

4.1111. Integración de Riemann de funciones no continuas

4.1112. Elementos diferenciales de longitudes, áreas y volúmenes

4.1113. Aplicaciones

4.1114. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

4.11

Area. Integral definida. Aplicaciones

4.1101. *Introducción*

El cálculo integral tiene como objeto el estudio de la integral definida. La integral indefinida o función primitiva se incluye en el cálculo diferencial.

El cálculo integral requiere unas nociones previas sobre área, pues la integral definida es la medida de un área.

Ahora bien, sobre el concepto de área, que está incluido dentro de la teoría general de la medida, existe más de una definición. Por tanto, tendremos un tipo u otro de integral, según la definición adoptada para el área.

Sin descender a detalles, que se saldrían del marco de este libro, vamos a esquematizar en el apartado siguiente el problema del área, y las definiciones de Jordan y Lebesgue.

Después se estudiará la integral de Riemann y regla de Barrow, que relaciona el cálculo diferencial con el integral, para terminar exponiendo los métodos de cálculo de áreas y volúmenes sencillos.

4.1102. *Medida de áreas de regiones poligonales*

Cuando hablamos del área de una figura nos referimos a su extensión o tamaño. Medir el área es medir el tamaño del conjunto de puntos del plano que forman la figura.

Es corriente definir el área del círculo como el límite de las áreas de los polígonos inscritos, cuando el número de lados crece indefinidamente. En este caso, para definir el área del círculo, se hace uso de las áreas de otras figuras más sencillas: los polígonos.

El área de un polígono está definida a partir del área del triángulo, pues basta descomponer el polígono en triángulos rampantes y sumar sus áreas. Se demuestra que, aunque hay muchas descomposiciones de este tipo, el valor del área es único.

Es más, a partir del área del triángulo se puede definir el área de cualquier región poligonal, incluso no conexa, descomponiendo en triángulos rampantes. Sirva de ejemplo el conjunto formado por las dos zonas rayadas de la figura 4.153.

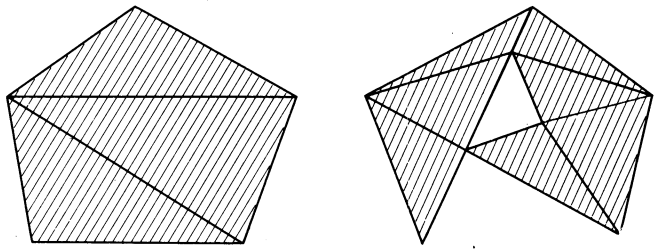
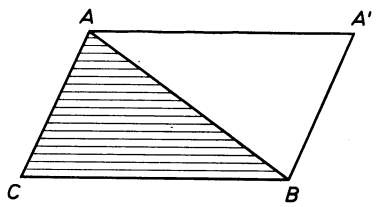


Fig. 4.153

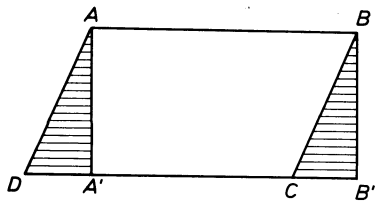
El área del triángulo se define a partir del área del paralelogramo.



Area $\widehat{ABC}$ = 1/2 área paralelogramo $AA'BC$.

Fig. 4.154

El área del paralelogramo se define a partir del área del rectángulo.



Area paralelogramo $ABCD$ = = área rectángulo $ABB'A'$

Fig. 4.155

El área del rectángulo, cuando se toma como unidad el cuadrado de lado unitario, se obtiene multiplicando las longitudes de sus lados. Este resultado se conoce de la geometría elemental.

En toda la exposición se está haciendo uso, sin explicitarlos, de los siguientes postulados:

1.º Dos figuras congruentes tienen igual área. (Congruentes quiere decir que se pueden llevar a coincidir mediante un movimiento.)
2.º Si F_1 y F_2 son figuras rampantes (en el sentido de que su intersección es vacío o puntos frontera), el área de su reunión es la suma de las áreas.

4.1103. *El problema general del área*

Como se ha visto, la obtención del área de una región poligonal es fácil. Se ha pensado en tomar las áreas de estos conjuntos de puntos como «áreas básicas», a partir de las cuales se definen las áreas de otros conjuntos de puntos más complejos, como el círculo.

No obstante, cuando se intenta encontrar una definición general de área, se ha podido constatar que no son los polígonos las figuras básicas o elementales más adecuadas para definir a partir de ellas el área de las demás figuras.

El conjunto elemental que ha tenido más éxito es el rectángulo-suma y su generalización, el rectángulo-serie. El primero está formado por una reunión finita de rectángulos rampantes y de lados paralelos.

Ejemplo de rectángulo-suma es el de la figura 4.156.

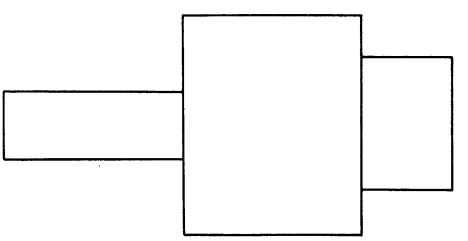


Fig. 4.156

El rectángulo-serie es un rectángulo-suma con un número infinito de rectángulos.

El área del rectángulo-suma (o serie) es la suma de las áreas de los rectángulos que lo componen.

La definición de área ha de ser tal que comprenda la mayor cantidad posible de conjuntos del plano como conjuntos dotados de área. Si el plano se representa por Π, lo ideal sería que todo subconjunto de Π, o sea, todo elemento de la clase $\mathcal{P}(\Pi)$ de partes de Π, tuviera área. Se puede probar que esto no es posible.

Si los conjuntos con área se incluyen en la clase $\mathfrak{A}(\Pi)$, resulta que el área es una aplicación de $\mathfrak{A}(\Pi) \xrightarrow{A} \mathfrak{R}$ que verifica los postulados siguientes:

1. $A(F) \geq 0$.
2. Si F_1 es congruente con F_2, entonces tienen igual área, $A(F_1) = A(F_2)$.
3. $A(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) = A(F_1) + A(F_2) + \cdots + A(F_n)$, donde F_1, F_2 $\cdots$ F_n son conjuntos rampantes, dos a dos.

4. $\mathfrak{A}(\Pi) \supset \mathfrak{E}(\Pi)$, donde $\mathfrak{E}(\Pi)$ es la clase de conjuntos elementales (polígonos, rectángulos-suma o serie) que nos sirven para definir el área de cualquier figura. El área, tal como se defina, ha de coincidir, para los conjuntos de $\mathfrak{E}(\Pi)$, con su área elemental.

El que la noción de área sea suficientemente potente, depende del éxito en la elección de los conjuntos elementales $\mathfrak{E}(\Pi)$, y en la definición de $A(F)$, a partir de los mismos.

4.1104. *Definiciones de área*

4.11041. *Definición de área según Jordan*

Jordan toma como conjuntos fundamentales los rectángulos-suma.
Contenido exterior de $F = C_e(F) = \inf_{S \supset F} A(S)$;

es decir, el ínfimo o extremo inferior de las áreas de todos los rectángulos-suma que contienen a F.

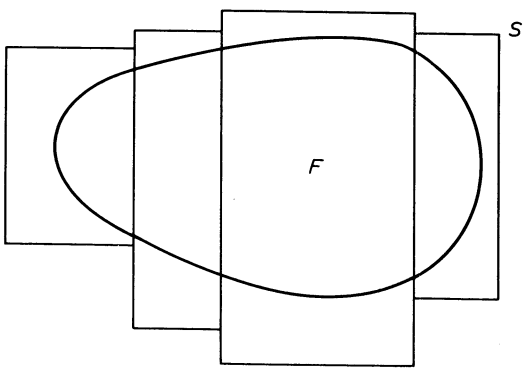


Fig. 4.157

Contenido interior de $F = C_i(F) = \sup_{S \subset F} A(S)$;

es decir, el supremo o extremo superior de las áreas de todos los rectángulos-suma contenidos en F (Fig. 4.158).

Cuando coinciden los contenidos interior y exterior se dice que F tiene contenido o área, en el sentido de Jordan. La clase de los conjuntos que tienen área de Jordan en el plano Π se representará $\mathscr{J}(\Pi)$.

$$\mathscr{J}(\Pi) \xrightarrow{C} \mathscr{R}$$
$$F \longrightarrow C(F) = \sup_{S \subset F} A(S) = \inf_{S \supset F} A(S)$$

Se comprueba que esta aplicación verifica los cuatro postulados del apartado anterior.

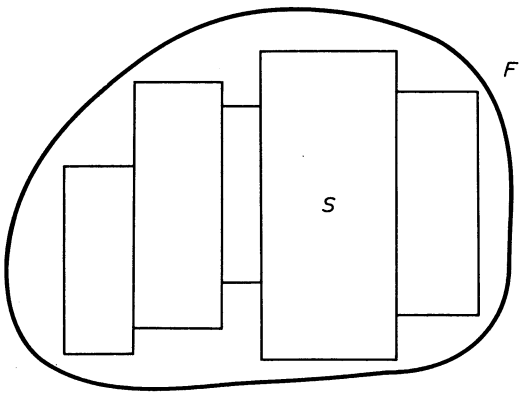


Fig. 4.158

4.11042. *Definición de área según Lebesgue*

Lebesgue toma como conjuntos fundamentales los rectángulos-serie. En consecuencia, ha de modificar el postulado 3 (aditividad) en el sentido de ampliarlo a un número infinito de sumandos (aditividad completa).

Medida exterior de $F = m_e(F) = \inf_{\Sigma \supset F} A(\Sigma)$;

es decir, el ínfimo de las áreas de todos los rectángulos-serie que contienen a F.

Medida interior de $F = m_i(F) =$ área de $R_1 - m_e(R_1 - A)$

R_1 es un rectángulo que contiene a A.

Se demuestra que el valor de $m_i(F)$ es independiente de R_1.

Cuando coinciden las medidas interior y exterior, se dice que F tiene medida o área en el sentido de Lebesgue. La clase de los conjuntos que tienen área de Lebesgue en el plano Π se representa $\mathfrak{L}(\Pi)$.

$$\mathfrak{L}(\Pi) \xrightarrow{m} \mathfrak{R}$$
$$F \longrightarrow m(F) = m_i(F) = m_e(F)$$

Se comprueba que la aplicación anterior verifica los cuatro postulados (el 3.º en condiciones menos restrictivas, con infinitos sumandos).

Es fácil ver que $\mathscr{J}(\Pi) \subset \mathfrak{L}(\Pi)$, habida cuenta de que se verifican las siguientes desigualdades:

$$C_i(F) \leq m_i(F) \leq m_e(F) \leq C_e(F);$$

o sea, todo conjunto con área de Jordan tiene área de Lebesgue, y además, ambas son iguales. La teoría de Lebesgue es más fina que la de Jordan, pero compatible con ella.

4.1105. *Integral definida*

Sea una función $y = f(x)$, definida en un sobreconjunto del intervalo $[a, b]$.

Se llama *integral definida de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$ al área de la porción de plano limitada por la gráfica de la función, el eje x y las paralelas por $x = a$ y $x = b$ al eje y.

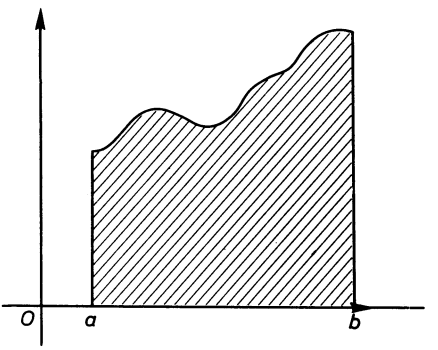


Fig. 4.159

Si el área que se considera es el área de Jordan, la integral definida se llama *de Riemann*.

Análogamente, si se contempla el área de Lebesgue, la integral definida se denomina *de Lebesgue*.

Si la porción de plano citada no tiene área, se dice que la función no es integrable. Hay funciones que no son integrables en el sentido de Riemann por no existir el área de Jordan, y, sin embargo, sí que lo son en el sentido de Lebesgue, por existir el área de Lebesgue.

Ejemplo

Sea la función definida en [0, 1], tal que

$$f(x) = 1, \text{ para } x = \text{número racional}$$
$$f(x) = 2, \text{ para } x = \text{número irracional}$$

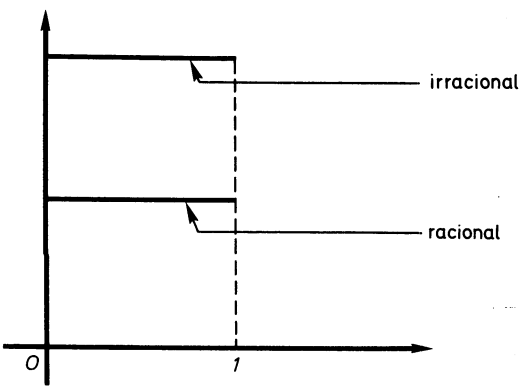


Fig. 4.160

Esta función no es integrable Riemann, pues $c_i = 1$; $c_e = 2$, pero sí es integrable Lebesgue, pues $m_i = m_e = 2$.

La integral de Lebesgue es más precisa que la integral de Riemann. No obstante, en la mayoría de los casos es suficiente con esta última que, si existe, coincide con la primera.

4.1106. *Integración de Riemann de una función continua, positiva y monótona*

Vamos a razonar sobre una función monótona creciente, teniendo en cuenta que el razonamiento es válido también para una monótona decreciente.

Sea la función $y = f(x)$ definida en $[a, b]$.

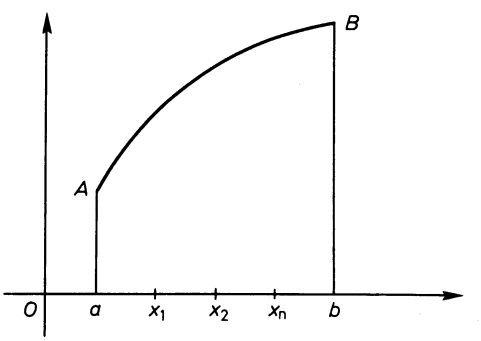


Fig. 4.161

La integral de Riemann será el área de Jordan de la porción de plano que limita el trapecio mixtilíneo *aABb*, en el supuesto de que exista.

Se representa

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Llamaremos una partición de $[a, b]$ a un conjunto $x_1, x_2 \ldots x_n$ de puntos de $[a, b]$.

Al numerar mediante subíndices los puntos de la partición, indicamos por x_1 el más próximo a a, x_2 el que le sigue, etc., hasta x_n, que es el más próximo a b (esto independiente de que $a < b$ o $a > b$).

A cada partición se hace corresponder un rectángulo-suma, cuya área designaremos s, contenido en el trapecio mixtilíneo (en la figura 4.162 marcado en grueso).

Según el mismo criterio, se obtiene un rectángulo-suma de área S (en la figura 4.162 marcado en fino) que contiene el trapecio.

I. Si s y S proceden de la misma partición, se verifica que $s \leq S$, pues basta ver las figuras gruesa y fina. Además se puede comprobar analíticamente, ya que

$$f(a) \leq f(x_1) \leq \ldots \leq f(x_n) \leq f(b)$$

por la condición de monotonía.

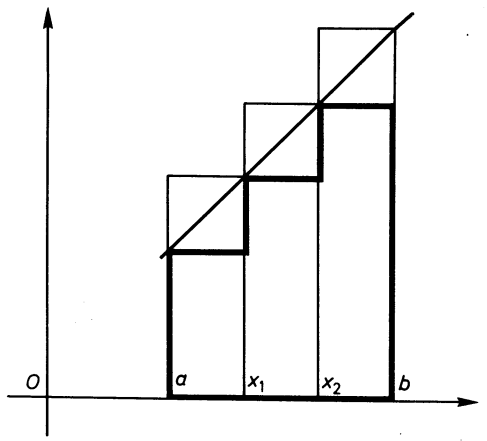


Fig. 4.162

$$s = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}) + (b - x_n)f(x_n)$$
$$S = (x_1 - a)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_n) + (b - x_n)f(b)$$

II. Si a una partición se le añaden nuevos puntos, obtenemos un área $s \leq s'$. Añadir el punto x', equivale a aumentar s en el área rayada (Fig. 4.163).

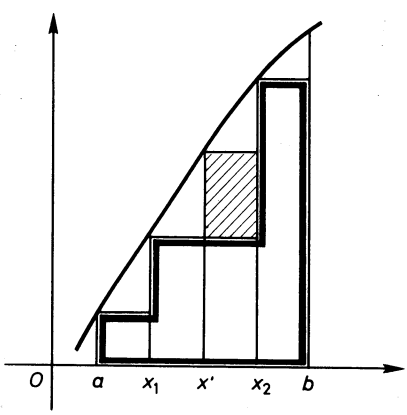


Fig. 4.163

Analíticamente se comprueba que añadir x' a la partición equivale a sustituir en las sumas el término

$$(x_2 - x_1)f(x_1) = (x_2 - x')f(x_1) + (x' - x_1)f(x_1)$$

por

$$(x_2 - x')f(x') + (x' - x_1)f(x_1)$$

que es mayor, puesto que

$$f(x') \geq f(x_1)$$

III. Si a una partición se le añaden nuevos puntos, obtenemos un área $S' \leq S$. Añadir el punto x' equivale a disminuir S en el área rayada (Fig. 4.164):

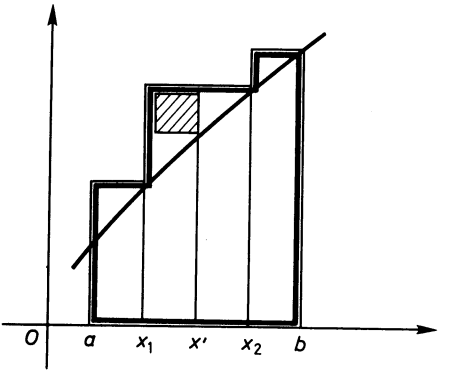


Fig. 4.164

Analíticamente se comprueba que añadir x' a la partición equivale a sustituir en la suma S el término

$$(x_2 - x_1)f(x_2) = (x_2 - x')f(x_2) + (x' - x_1)f(x_2)$$

por

$$(x_2 - x')f(x_2) + (x' - x_1)f(x')$$

que es menor, puesto que

$$f(x') \leq f(x_2)$$

IV. Cualquier $s \leq S$.

En efecto:

Si s y S pertenecen a la misma partición, está claro que $s \leq S$, por *I*.

Si s y S pertenecen a distinta partición, se forma la partición compuesta, es decir, la que tiene los puntos de ambas. A esta partición compuesta le corresponden s'' y S''.

Resulta:

$s'' \leq S''$ por I
s por II
S , por III;

luego

$$s \leq s'' \leq S'' \leq S,$$

o sea,

$$s \leq S, \qquad \text{c. q. d.}$$

V. Las s están acotadas superiormente por cualquier S, luego existe sup s.
Las S están acotadas inferiormente por cualquier s, luego existe inf S.
Si se pretende demostrar que existe la integral de Riemann, se ha de demostrar que inf S = sup s, para lo cual basta comprobar que existen s y S, que difieren tan poco como se desee.
Vamos a obtener dos sucesiones s_n y S_n, tales que $\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0$.
En las gráficas a, b, c de la figura 4.165 considérense los rectángulos-suma que resultan de dividir $[a, b]$ en 1, 2, 2^2, 2^3 ... partes iguales.

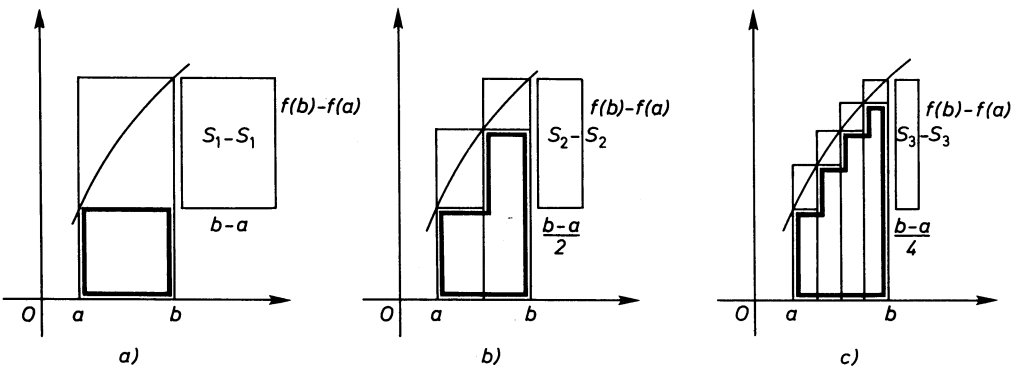


Fig. 4.165

Las áreas cuyos perímetros están marcados en grueso se designarán s_1, s_2 ...
Y las áreas cuyos perímetros están marcados en fino, por S_1, S_2 ...
Se tiene

$$S_1 - s_1 = (b - a)\,(f(b) - f(a))$$
$$S_2 - s_2 = \frac{b - a}{2}\,(f(b) - f(a))$$
$$S_3 - s_3 = \frac{b - a}{2^2}\,(f(b) - f(a))$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n - s_n = \frac{b - a}{2^{n-1}}\,(f(b) - f(a))$$

Es evidente que

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(b - a)\,(f(b) - f(a))}{2^{n-1}} = 0$$

Como existen s_n y S_n, que difieren tan poco como se desee, resulta que

$$\inf S = \sup s = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{c.q.d.}$$

4.1107. *Integración de una función monótona, continua y negativa*

Si nos fijamos en las expresiones de s y S, resulta que, en el supuesto de que $f(x)$ fuese una función continua monótona y *negativa*, s y S serían negativas.

Hemos definido la integral de Riemann como el área de Jordan del trapecio mixtilíneo, y un área es esencialmente positiva. Ahora bien, el área es

$$\int_a^b f(x) = \inf S = \sup s,$$

siempre que la función sea monótona positiva. Podemos generalizar y definir la integral mediante la misma expresión, aunque $f(x)$ sea negativa, prescindiendo de que en este caso s y S serán negativas y, por tanto, también $\inf S = \sup s$.

Así, pues, si $f(x)$ es función continua y monótona, se define:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf S = \sup s,$$

tanto si $f(x)$ es positiva como negativa.
Si $f(x)$ es positiva,

$\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área del trapecio mixtilíneo.

Si $f(x)$ es negativa,

$\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área del trapecio mixtilíneo, pero con signo negativo.

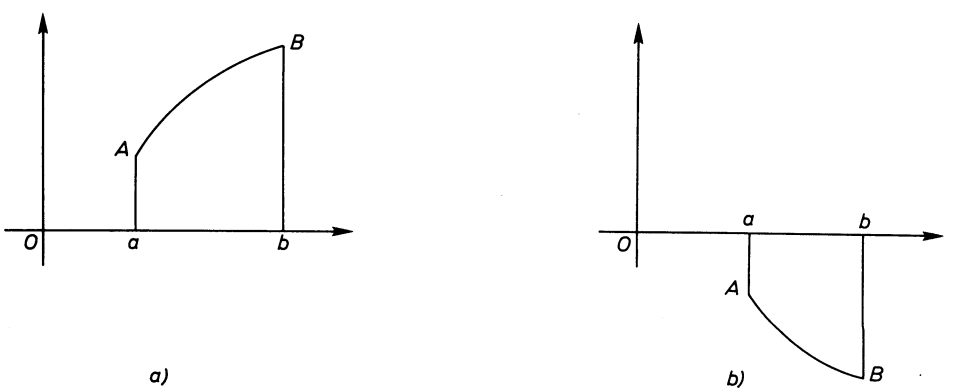


Fig. 4.166

$$\text{Area } aABb = \int_a^b f(x)\,dx \text{ (Gráfica } a) \text{ de la figura 4.166)}$$

$$\text{Area } aABb = -\int_a^b f(x)\,dx \text{ (Gráfica } b) \text{ de la figura 4.166)}$$

Ejercicio

Con la definición anterior, demuéstrese que

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

4.1108. *Integración de una función continua*

Si la función es positiva, se descompone en trozos en los que sea monótona,

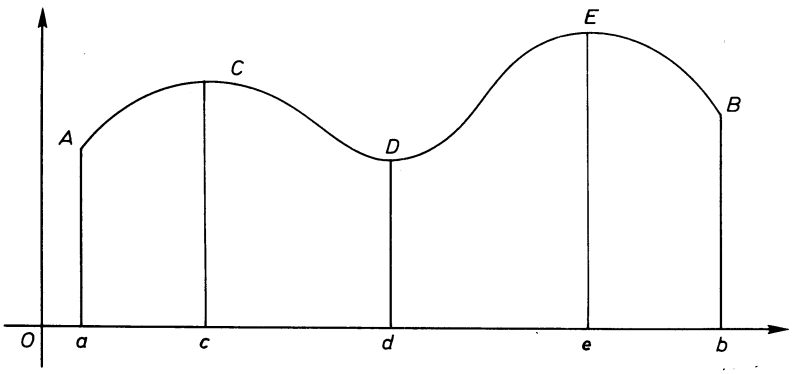


Fig. 4.167

según el número 4.1106.

$$\text{área } aACc = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\text{área } cCDd = \int_c^d f(x)\,dx$$

$$\text{área } dDEe = \int_d^e f(x)\,dx$$

$$\text{área } eEBb = \int_e^b f(x)\,dx$$

Por la propiedad aditiva del área de Jordan,

$$\text{área } aABb = \text{área } aACc + \text{área } cCDd + \text{área } dDEe + \text{área } eEBb = \\ = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx;$$

pero área $aABb$, que como vemos existe, es igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Aunque la función fuera negativa, es válido lo anterior con el convenio establecido en el número anterior.

Resumiendo: Toda función continua es integrable Riemann.

El valor de la integral representa la suma de las áreas A_1, A_2, A_3, con su signo

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

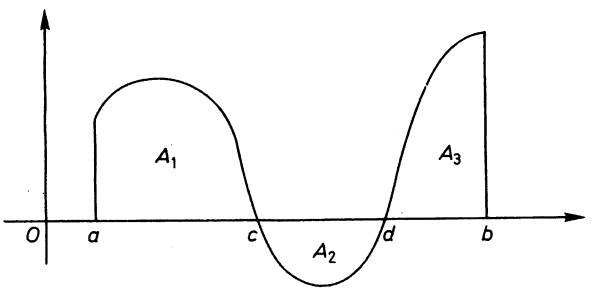


Fig. 4.168

4.1109. *Teorema de Barrow*

Supóngase la función continua $f(x)$, y considérese la integral de Riemann $A(X) = \int_a^X f(x)\,dx$, donde el extremo X de la integral permanece variable.

Se obtiene así, una función de X que llamaremos $A(X)$.

Consideremos $\Delta A = A(X + \Delta X) - A(X)$

$$\Delta A = XBB'(X + \Delta X) \text{ (trap. mixt.)}$$

ΔA está comprendido entre las áreas de los rectángulos señalados en trazos grueso y fino, en la figura 4.169.

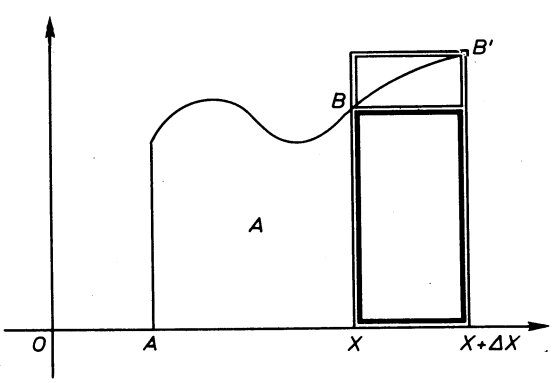


Fig. 4.169

$$\boxed{\Delta X \cdot f(X)} \leq \Delta A \leq \boxed{\Delta X \cdot f(X + \Delta X)}$$

área rectángulo — área rectángulo

$$f(X) \leq \frac{\Delta A}{\Delta X} \leq f(X + \Delta X)$$

Como $f(X)$ es continua, por hipótesis, se verifica que $\lim_{X \to 0} f(X + \Delta X) = f(X)$, por tanto, $\frac{\Delta A}{\Delta X}$ tenderá al mismo límite, o sea,

$$\lim_{X \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta X} = A'(X) = f(X).$$

Como este razonamiento es válido para cualquier X, se puede escribir $A'(X) = f(X)$.

Esta relación constituye el teorema de Barrow.

Dicta que la integral $\int_a^x f(x)\,dx$ es una primitiva de $f(x)$; es decir, relaciona el Cálculo Integral con el Cálculo Diferencial.

Sea $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$. Como dos primitivas difieren en una constante, será $A(X) = F(X) + C$, es decir: $\int_a^X f(x)\,dx = F(X) + C$; pero, para $X = a$, resulta $0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$, luego

$$\boxed{\int_a^X f(x)\,dx = F(X) - F(a)}$$

que es la clásica regla de Barrow.

4.1110. *Funciones definidas por integrales*

Hemos visto que toda función continua es integrable Riemann, pero no son las únicas, como se verá en el apartado siguiente.

Si existe $A(X) = \int_a^X f(x)\,dx$, se puede considerar $A(x) = \int f(x)\,dx$, según el teorema de Barrow. Es decir, que el problema de hallar la primitiva de $f(x)$ ha quedado reducido al problema de hallar un área.

La función primitiva es precisamente la función área; y si la primitiva no existe, como combinación de funciones elementales, sí existe como área.

Aquí es donde se ve lo que quedó dicho en el capítulo anterior: que el cálculo integral aporta nuevas funciones al análisis matemático.

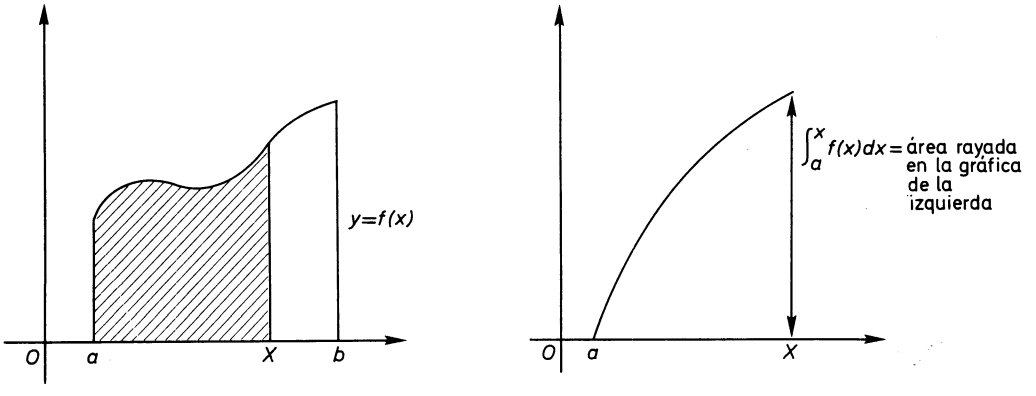


Fig. 4.170

4.1111. *Integración de Riemann de funciones no continuas*

Sea la función $f(x)$ con un número finito de puntos de discontinuidad. En la figura 4.171, son los puntos $x = c$ y $x = d$.

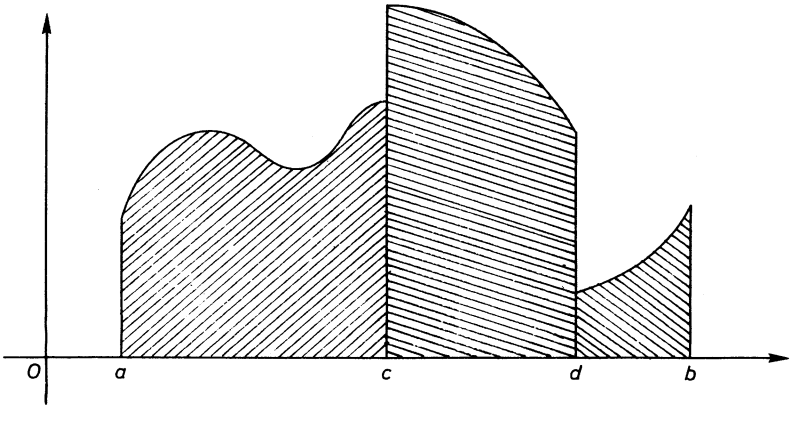


Fig. 4.171

Es evidente que existen las integrales de los trozos continuos

$$\int_a^c f(x)\,dx, \int_c^d f(x)\,dx, \int_d^b f(x)\,dx$$

Por la aditividad del área de Jordan resulta que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{área rayada} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Es decir, *toda función con un número finito de discontinuidades es integrable Riemann.*

$$\text{La función} \begin{cases} f(x) = 1 \text{ para } x \in [0, 1] - \left\{ 1 - \frac{1}{n};\ n = 2, 3, \ldots \right\} \\ f(x) = 3/2 \text{ para } x = 1 - \frac{1}{n};\ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

también es integrable Riemann en [0, 1], y tiene un número infinito de discontinuidades

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

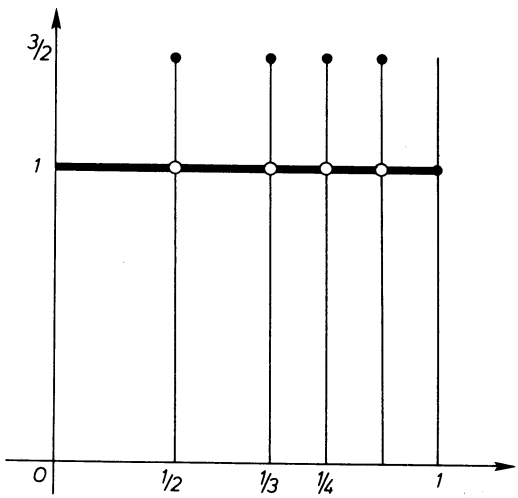


Fig. 4.172

La idea que hemos querido desarrollar en este apartado es que las funciones continuas no son las únicas integrables Riemann.

4.1112. *Elementos diferenciales de longitudes, áreas y volúmenes*

Al objeto de poder calcular áreas y volúmenes sencillos, vamos a escribir las expresiones de los distintos elementos diferenciales.

Ya sabemos que la diferencial es la parte principal del incremento, o sea, que la diferencial diferirá del incremento en un infinitésimo de orden mayor o igual que 2.

En las figuras que siguen, los elementos diferenciales se dibujan de trazo grueso y los incrementos de trazo fino.

1. *Elemento diferencial de área*

$$dA = y\,dx$$
$$|\Delta A - dA| < (tg\alpha) \cdot (dx)^2$$

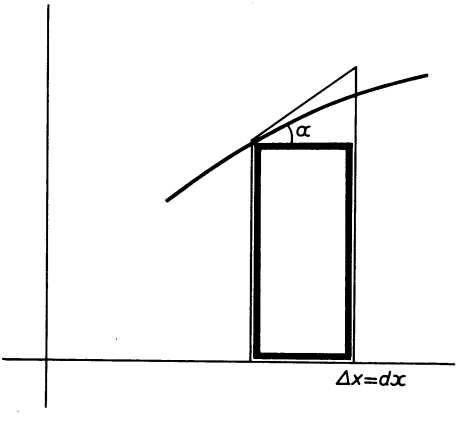


Fig. 4.173

2. *Elemento diferencial de arco*

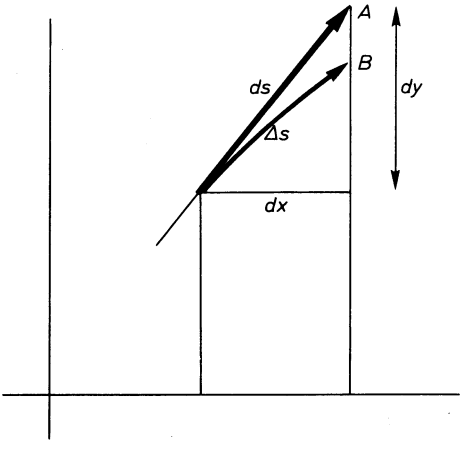
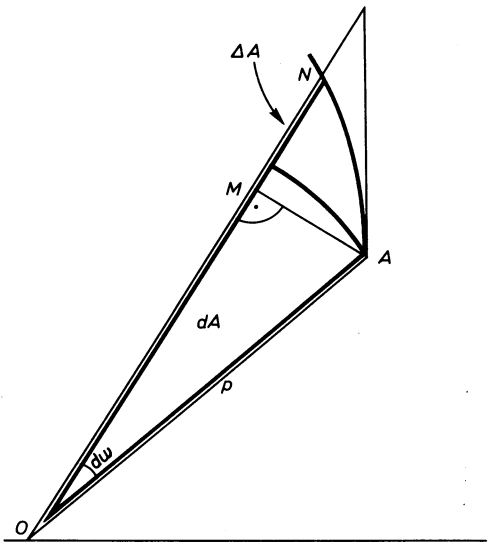


Fig. 4.174

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx =$$
$$= \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$
$$|ds - \Delta s| < AB = k(dx)^2$$

3. *Elemento diferencial de área con coordenadas polares*

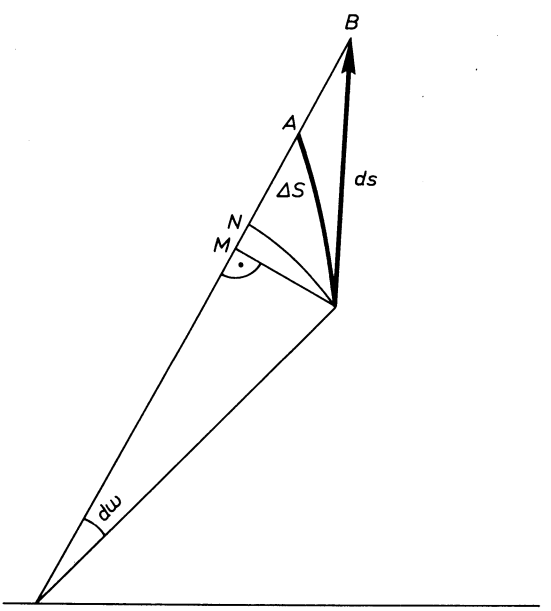


$$dA = 1/2\ \rho^2\ d\omega$$

Fig. 4.175

$|\Delta A - dA| <$ área $\overset{\frown}{AMN}$, y se puede comprobar que área $\overset{\frown}{AMN} = k(d\omega)^2$, o sea, un infinitésimo de orden superior a dA.

4. *Elemento diferencial de arco en coordenadas polares*



$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho\ d\omega)^2}$$
$$= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\ d\omega$$
$$|ds - \Delta s| < AB = k(d\omega)^2$$

Fig. 4.176

5. *Elemento diferencial de volumen de revolución*

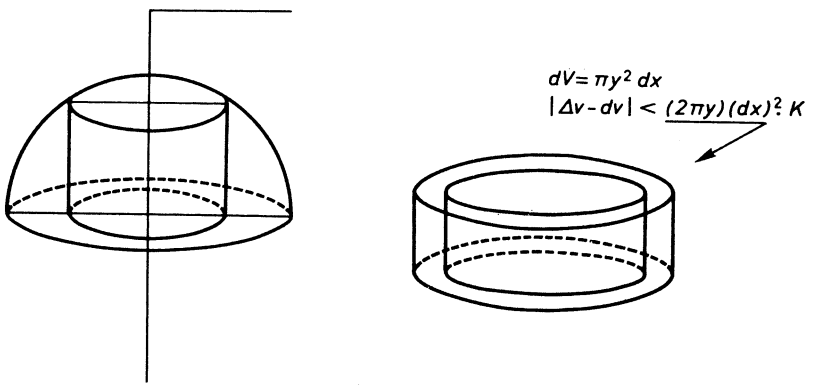


Fig. 4.177

6. *Elemento diferencial de área de revolución*

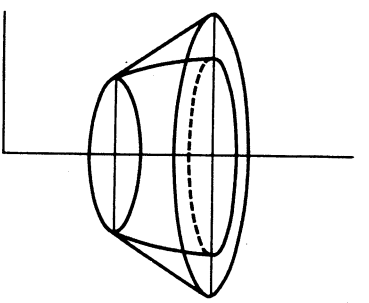


Fig. 4.178

$$dS = 2\pi y\, ds + \frac{(ds)^2}{2} \simeq 2\pi y\, ds$$

$$|\Delta S - ds| < 2\pi y\, ds - 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi\, y \left[\sqrt{1 + y'^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \right] dx$$

La parte del corchete es infinitésimo, luego

$$|\Delta S - ds| < k(dx)^2$$

4.1113. *Aplicaciones*

Antes de pasar al desarrollo de algunos ejemplos de cálculo de áreas, volúmenes y longitudes, recuérdese que toda función es una curva pero no recíprocamente. Se puede decir que toda curva es una colección de funciones.

La ecuación de una curva puede representarse en tres formas:

a) *explícita.* Es la que ya conocemos $y = f(x)$.
Por ejemplo, la recta $y = 2x + 3$; la parábola $y = 3x^2$.

b) *implícita.* Es una relación entre x e y, $f(xy) = 0$.
Por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x = 0$, o bien la recta $3x + y - 7 = 0$.

c) *paramétrica.* Es la expresión de x e y en función de un parámetro t, o sea,

$$\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\}$$

Ejemplos: la recta

$$\left.\begin{matrix} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 4 \end{matrix}\right\}$$

la circunferencia

$$\left.\begin{matrix} x = R\cos t \\ y = R\operatorname{sen} t \end{matrix}\right\}$$

El paso de una expresión a otra no tiene, teóricamente, dificultad.

1. *Volumen de la esfera de radio R* (bola esférica).

$$x^2 + y^2 = R^2;\ dV = \pi y^2\,dx = \pi(R^2 - x^2)\,dx$$

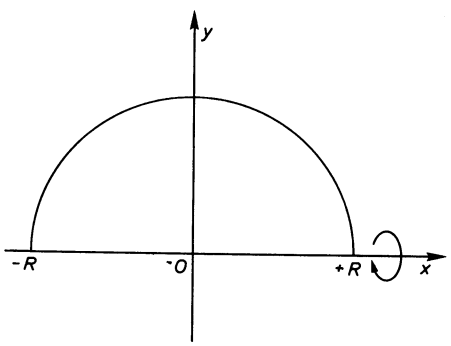


Fig. 4.179

$$V = \int_{-R}^{+R} dV = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - x^2)\, dx = \pi \left| R^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{-R}^{+R} =$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 4/3\pi R^3$$

2. *Area de la esfera de radio R*

Es el área de revolución de la misma circunferencia anterior.

$dS = 2\pi y\, ds$; pero si

$$y = \sqrt{R^2 - x^2};\ y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$$

luego,

$$dS = 2\pi y\, ds = 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\, \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi R\, dx$$

$$S = \int_{-R}^{+R} dS = \int_{-R}^{+R} 2\pi R\, dx = \left| 2\pi R x \right|_{-R}^{+R} = 4\pi R^2$$

3. *Area encerrada por la lemniscata*: $\rho^2 = 2c^2 \cos 2\omega$

Es el lugar de los puntos M tales que $MF \times MF' = 2c^2$, siendo F, F' tales que $FF' = 2c$

$$1/4\, A = \int_0^{\pi/4} 1/2\, \rho^2\, d\omega = \int_0^{\pi/4} c^2 \cos 2\omega\, d\omega =$$

$$= c^2 \left| \frac{\text{sen } 2\omega}{2} \right|_0^{\pi/4} = \frac{c^2}{2} \Rightarrow A = 2c^2$$

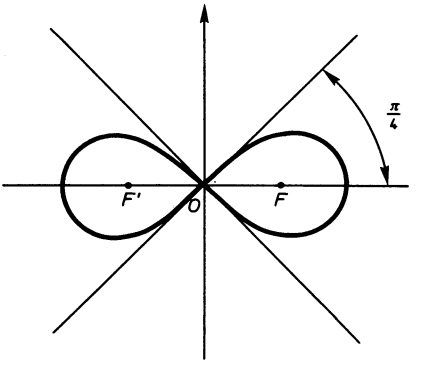


Fig. 4.180

4. *Area encerrada por la elipse*

$$\left.\begin{aligned} x &= OQ' = OQ \cdot \cos t = a \cos t \\ y &= MQ' = PP' = OP \operatorname{sen} t = b \operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}$$

La curva de ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}$$

es una elipse de semiejes a y b, pues

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

como es fácil de comprobar.

$$dA = y\,dx = b \operatorname{sen} t\, a(-\operatorname{sen} t)\,dt = -ab \operatorname{sen}^2 t\,dt$$
$$\cos 2t = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow -\operatorname{sen}^2 t = 1/2\,(\cos 2t - 1);$$

luego

$$dA = \frac{ab}{2}(\cos 2t - 1)\,dt.$$

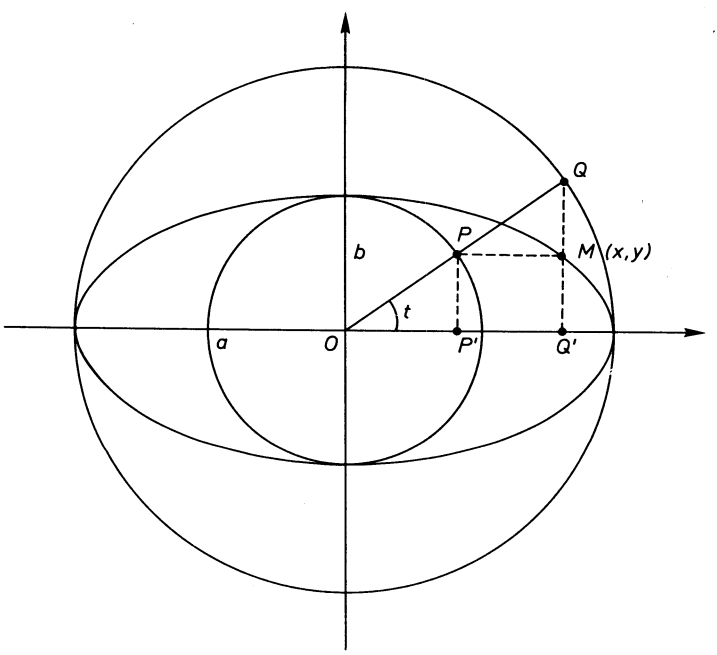


Fig. 4.181

El área del primer cuadrante será

$$1/4A = \int_{\pi/2}^{0} \frac{ab}{2}(\cos 2t - 1)\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left|\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - t\right|_{\pi/2}^{0} = \frac{\pi ab}{4}$$

luego

$$A = \pi ab.$$

B para $t = \dfrac{\pi}{2}$

C para $t = 0$

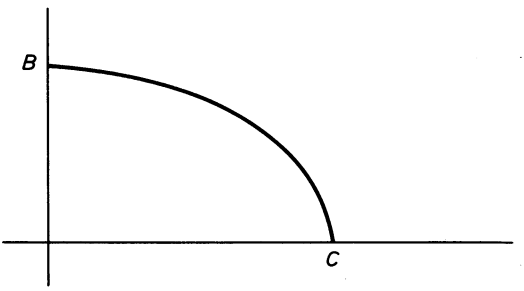


Fig. 4.182

Si $a = b = R$, la elipse se convierte en el círculo de radio R y su área será πR^2.

5. *Longitud de un arco de catenaria*

Queremos hallar la longitud de la curva $y = \operatorname{Ch} x$ entre el punto A de abscisa $=0$, y el punto B de abscisa $=2$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2 x}\,dx = \operatorname{Ch} x\,dx$$

$$S = \int_0^2 \operatorname{Ch} x\,dx = |\operatorname{Sh} x|_0^2 = \operatorname{Sh} 2 - \operatorname{Sh} 0 = \operatorname{Sh} 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$$

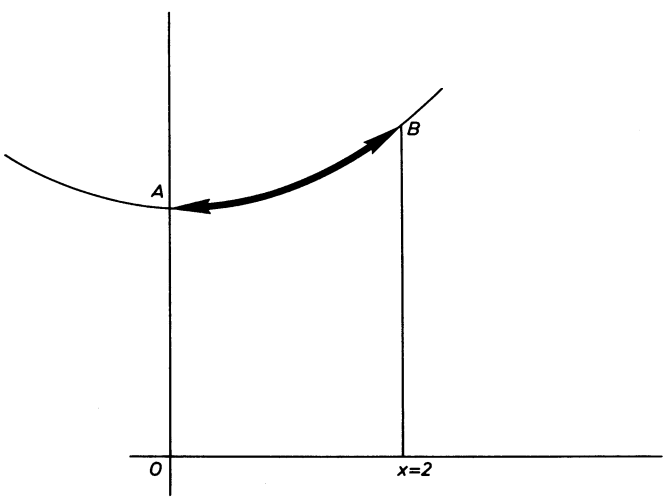


Fig. 4.183

6. *Area de la parte rayada*

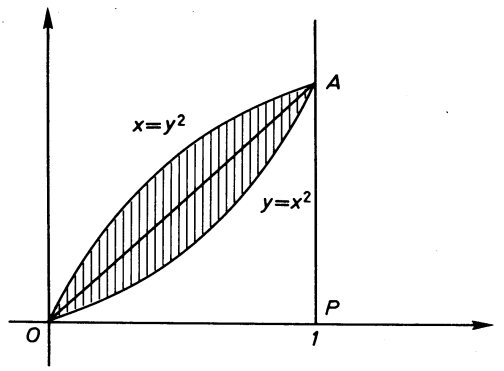


Fig. 4.184

$$1/2\,A = A_{\overset{\frown}{OAP}} - \int_0^1 y\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 x^2\,dx =$$
$$= \frac{1}{2} - \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Luego

$$A = \frac{1}{3}$$

4.1114. *Aplicabilidad. Automatismos y destrezas*

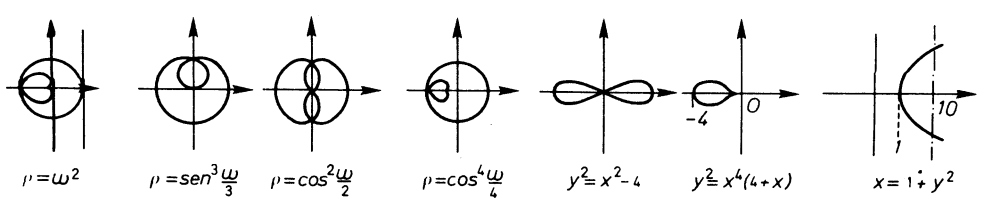
4.11140.

Hállese la longitud de las curvas que se indican:

$\rho = \omega^2$ entre $\omega = 0$ y $\omega = 2\sqrt{3}$; $\rho = \text{sen}^3\frac{\omega}{3}$; $\rho = \cos^2\frac{\omega}{2}$; $\rho = \cos^4\frac{\omega}{4}$

4.11141.

Hállense las áreas encerradas por las curvas que se indican, sobre las gráficas que se proporcionan.



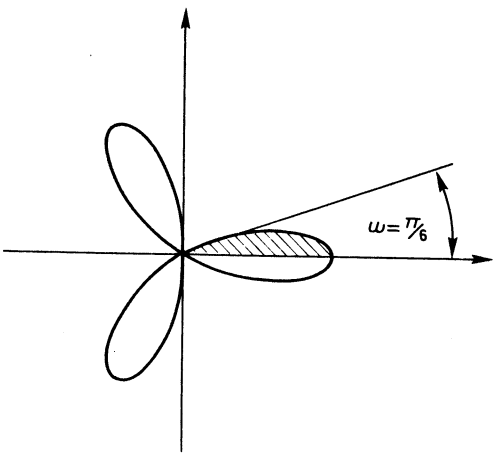
4.11142.

Determínense las longitudes de las curvas que se establecen, entre los límites que se fijan

$\left\{\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t^3 \end{array}\right.$ desde $t = 0$ a $t = 4$; $\left\{\begin{array}{l} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t \end{array}\right\}$ desde $t = 0$ a $t = 4$

4.11143.

a) Hállese el área encerrada por la curva $\rho = a \cos 3\omega$, en el espacio rayado.
b) Encuéntrese el área determinada por $y = \operatorname{tg} \cdot x$ entre 0 y $\pi/4$.
c) Calcúlese el área determinada por $y = Lx$ entre 1 y 5.



4.11144.

Area de $y = \operatorname{sen} x$ entre 0 y π.

Area de $y = \dfrac{2x}{(x-1)(x+2)}$ entre 3 y 5.

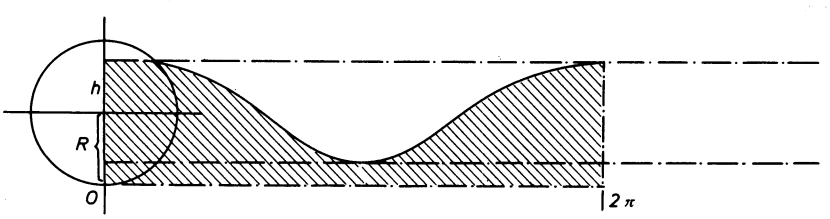
Area de $\left\{\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = 2t^3 - 3 \end{array}\right\}$, desde $t = 2$ a $t = 5$.

4.11145.

Area de $\left\{\begin{array}{l} x = R \cos t \\ y = R \operatorname{sen} t \end{array}\right\}$, desde $t = 0$ a $t = 2\pi$.

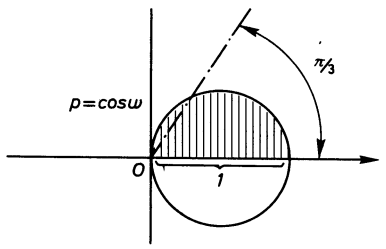
4.11146.

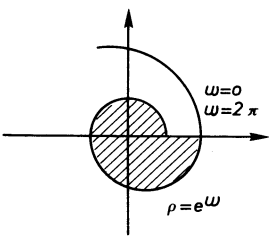
Hállese el área rayada de la curva trocoide $\left\{\begin{array}{l} x = R\varphi + h \operatorname{sen} \varphi \\ y = R \quad + h \cos \varphi \end{array}\right\}$.

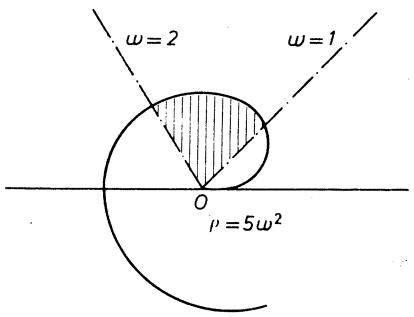


4.11147.

Determínense las áreas rayadas que se dibujan:







4.11148.

Hállese la longitud de las siguientes curvas:

$y = 2\,\mathrm{Ch}\,\dfrac{x}{2}$ desde $x = 0$ a $x = 3$; $y = 3x^{3/2}$ desde $x = 1$ a $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} x = R(\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \\ y = R(1 + \cos\varphi) \end{array}\right\}, \text{ desde } \varphi = 0 \text{ a } \varphi = \pi$$

4.11149.

Determínese la longitud de las curvas que se indican:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R\operatorname{sen} t \end{array}\right\}, \text{ desde } t = 0 \text{ a } t = \pi$$

$\rho = \omega^2$, desde $\omega = 0$ a $\omega = 2$

$\rho = 2R\cos\omega$, desde $\omega = 0$ a $\omega = \pi/2$

5

ALGEBRA LINEAL

BIBLIOGRAFIA 5

SANTALÓ: *Vectores y tensores*, 368 págs. Eudeba. Buenos Aires, 1970.

J. REY PASTOR: *Elementos de Análisis algebraico*, 15.ª ed., Biblioteca Matemática. Madrid, 1966.

AYRES: *Matrices*. Ed. McGraw-Hill (Schaum). México, 1968.

AITKEN: *Determinantes y matrices*. Dossat. Madrid.

P. ABELLANAS: *Elementos de Matemáticas*. Ed. Autor. Madrid.

5.1

Espacios vectoriales

5.101. Introducción

5.102. Vectores en el plano

5.103. Vectores libres

5.104. Adición de vectores libres

5.1041. *Definición*
5.1042. *Propiedades de la adición*
5.1043. *Estructura de* $(V_2, +)$

5.105. Multiplicación de un número real por un vector libre

5.1051. *Definición*
5.1052. *Propiedades de la multiplicación de un número real por un vector libre*
5.1053. *Plano vectorial. Recta vectorial*

5.106. Dependencia e independencia lineal

5.107. Base y dimensión

5.108. Coordenadas. Cambio de coordenadas

5.109. Generalización al espacio

5.110. Definición de espacio vectorial

5.111. Dimensión de un espacio vectorial

5.112. Subespacios vectoriales de un espacio vectorial

5.113. Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales

5.114. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

5.1

Espacios vectoriales

5.101. Introducción

En este capítulo se aborda el estudio de una estructura algebraica básica para toda la matemática: el espacio vectorial. En geometría el espacio afín (del cual es un caso particular el espacio euclídeo) y el espacio proyectivo se definen a partir del espacio vectorial. El análisis matemático superior usa espacios funcionales (de Banach, de Hilbert, etc.) que son tipos particulares de espacios vectoriales.

El *espacio vectorial* se conoce también con el nombre de *espacio lineal.*

Vamos a estudiar el espacio vectorial geométrico con todo detalle. Este es el que ha dado lugar a la estructura algebraica general, con significado físico o sin él, que se conoce como espacio vectorial o espacio lineal.

Después se establecerán algunos ejemplos de espacios vectoriales y se incluirá la noción de aplicación lineal entre espacios vectoriales, que tiene relación con el concepto de matriz, a estudiar en capítulo posterior.

5.102. Vectores en el plano

Consideremos el par de puntos A, B. Este par de puntos determina una recta. Es sabido que los puntos de la recta están ordenados y, por tanto, tiene sentido hablar de los puntos de la recta comprendidos entre A y B.

Primera definición. Se llama *segmento* $\overline{AB}$ al conjunto de los puntos de la recta comprendidos entre A y B. Los puntos A y B se denominan *extremos* del segmento.

Segunda definición. Un *vector* es un segmento cuyos extremos se dan en un cierto orden; se representa $\overrightarrow{AB}$ en vez de $\overline{AB}$. Al primer extremo se le llama *origen* y al segundo extremo se le llama *extremo.*

$\overrightarrow{AB}$ tiene como origen A y como extremo B $\quad \overset{A \quad B}{\longrightarrow}$

$\overrightarrow{BA}$ tiene como origen B y como extremo A $\quad \overset{A \quad B}{\longleftarrow}$

El vector se representa como se acaba de hacer, por medio de una flecha que indica el sentido del recorrido del origen al extremo.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ se dicen *opuestos.*

Dirección. Dado el conjunto de todas las rectas del plano, vamos a definir la relación de *paralelismo*, que representamos por //.

Sean a y b dos rectas del plano: se dice que están relacionadas por la relación *paralelismo*, $a \,//\, b$, o lo que es igual, que son paralelas, cuando

$$(a = b) \vee (a \cap b = \phi)$$

Es decir, a es paralela a b si no tienen ningún punto común o ambas coinciden. (No cabe decir que dos rectas paralelas se cortan en un punto impropio, pues este concepto pertenece al plano proyectivo y el plano euclídeo en el que trabajamos no tiene puntos impropios.)

La relación de paralelismo es una relación de equivalencia pues verifica las propiedades:

1) Reflexiva: $a \,//\, a$, evidente, según la definición.
2) Simétrica: $a \,//\, b \Rightarrow b \,//\, a$, se cumple por la propiedad conmutativa de la intersección de conjuntos $a \cap b = b \cap a$.
3) Transitiva: $a \,//\, b \wedge b \,//\, c \Rightarrow a \,//\, c$.

Esta propiedad se basa en el 5.º postulado de Euclides

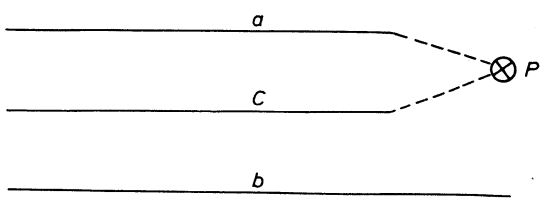


Fig. 5.1

En efecto, si a y c se cortan en un punto P, resulta que por P se pueden trazar dos paralelas a b.

En cualquier otra geometría, la elíptica o la hiperbólica, la relación de paralelismo no sería de equivalencia al faltar la propiedad transitiva.

Se llaman *direcciones* a las clases de equivalencia de la relación de paralelismo que se acaba de establecer. Por lo tanto, una dirección es el conjunto de todas las rectas que son paralelas entre sí.

Una sola recta determina la dirección, es decir, la clase a la que pertenece.

En un vector se define:

1) *Módulo.* La longitud del segmento con una determinada unidad

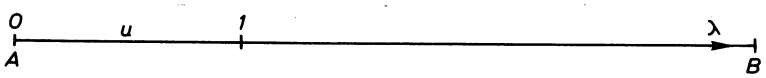


Fig. 5.2

La longitud es el número que corresponde al extremo B, cuando al origen del vector se le asigna el 0, y al extremo del segmento unitario u (véase figura 5.2) el 1. Este número λ está determinado por el teorema de la biyección entre puntos de una recta y números reales.

2) *Dirección.* Es la dirección de la recta que lo contiene.

Hasta ahora sólo conocíamos la dirección de una recta. Acabamos de definir la de un vector (también vale para un segmento), basándonos en la anterior definición.

La dirección en los distintos puntos de una curva se define también a partir de la recta (la dirección de la tangente); es decir, que la definición de dirección en rectas es el concepto básico.

3) *Sentido.* Es el sentido de recorrido de un punto que se trasladara del origen al extremo*.

4) *Punto de aplicación.* Es el punto origen del vector.

Sentido de los vectores paralelos

Dos vectores se dicen paralelos cuando están contenidos en rectas paralelas. Consideremos los dos casos posibles:

a) Tienen la misma base.

En este caso se dice que tienen el mismo sentido si la intersección de las semirrectas del mismo origen, que los contienen, es una semirrecta.

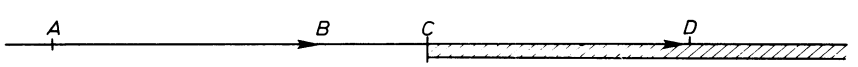


Fig. 5.3

* Creemos conveniente dar esta definición cinemática, sin formalizar.

En caso contrario, o sea, cuando la intersección es vacío o un segmento, se dice que tienen sentido opuesto.

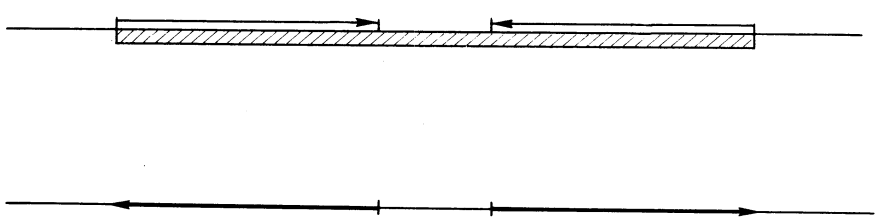


Fig. 5.4

b) Tienen distinta base.

Se dice que tienen el mismo sentido cuando están contenidos en el mismo semiplano de los determinados por la recta que une sus puntos de aplicación. Sentido opuesto, cuando están contenidos en uno y otro semiplano, respectivamente.

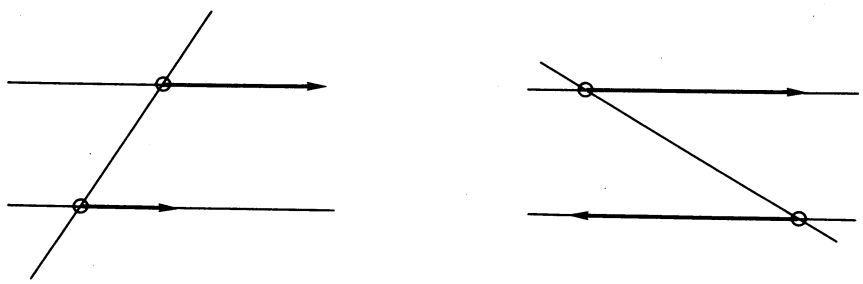


Fig. 5.5

5.103. Vectores libres

Entre todos los vectores del plano vamos a establecer una relación que denominaremos de *equipolencia*.

Un vector $\overrightarrow{AB}$ se dice *equipolente* a otro vector $\overrightarrow{CD}$ y se representa $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ si

I) Están en rectas distintas y el cuadrilátero $ABDCA$ es un paralelogramo.

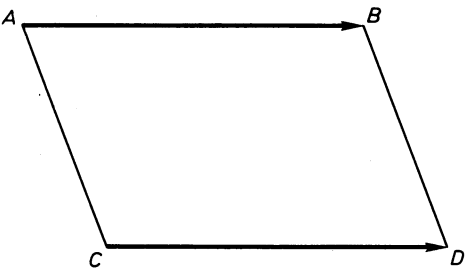


Fig. 5.6

II) Están en la misma recta y ambos son equipolentes según I) a un mismo vector que está fuera de la recta.

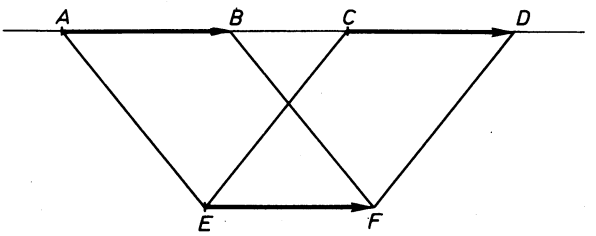


Fig. 5.7

La relación que se acaba de establecer es una relación de equivalencia. En efecto, tiene las propiedades

1) *Reflexiva.* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$

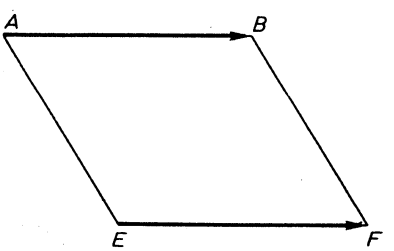
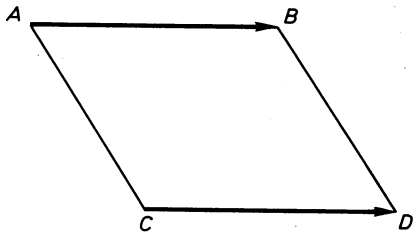


Fig. 5.8

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB} \quad \text{(por II)}$$

2) *Simétrica.* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$



ABDCA paralelogramo $\Rightarrow$ *CDBAC* paralelogramo

Fig. 5.9

Si estuvieran $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ en la misma recta, también se verificaría la propiedad simétrica

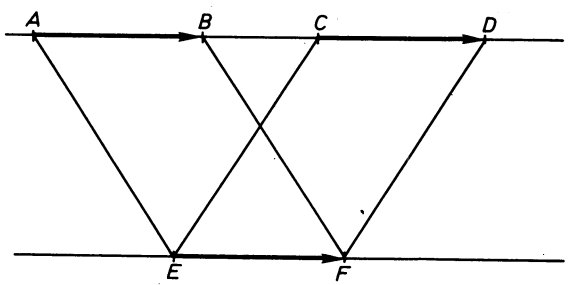


Fig. 5.10

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$$

3) *Transitiva.* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$

Para demostrar que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$, basta demostrar que *ABFEA* es un paralelogramo:

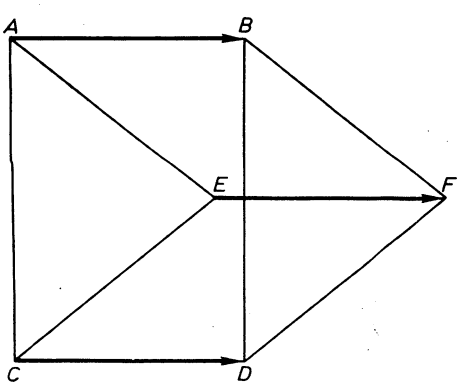


Fig. 5.11

$AB \,//\, EF$, pues ambas rectas son paralelas a CD.

Si demostramos $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{EF}|$, resultará que el cuadrilátero *ABFEA* es paralelogramo por tener dos lados opuestos iguales y paralelos.

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ por equipolentes} \\ |\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ por equipolentes} \end{array}\right\} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{EF}| \quad , \quad \text{c.q.d.}$$

Los casos en que dos o los tres vectores estén situados sobre la misma recta se deducen sin dificultad. Hágase como ejercicio.

Una relación de equivalencia determina una clasificación; luego, representando por $\mathfrak{V}$ = {conjunto de vectores del plano}, se obtiene el conjunto cociente $\mathfrak{V}/\sim$, cuyos elementos son las clases de equivalencia. Cada una de estas clases de equivalencia se llama *vector libre.*

Así, pues, un «vector libre» es un conjunto de vectores que forman una clase de equivalencia respecto de la relación $\sim$.

Los vectores libres se escribirán $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, ... (En bibliografía actual es frecuente suprimir la raya y escribir simplemente x, y, z, ...)

Un vector libre está representado por uno cualquiera de la clase. Es costumbre escribir $\bar{x} = \{\overrightarrow{AB}\}$, lo cual indica que $\bar{x}$ es el conjunto de todos los vectores del plano equipolentes a $\overrightarrow{AB}$.

Proposición. Dado un vector $\overrightarrow{AB}$, y un punto C, existe un vector único equipolente a AB, y de origen C.

En efecto: Se traza por C la paralela a AB (Fig. 5.12); y por B la paralela a AC, determinando de manera unívoca D.

$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$

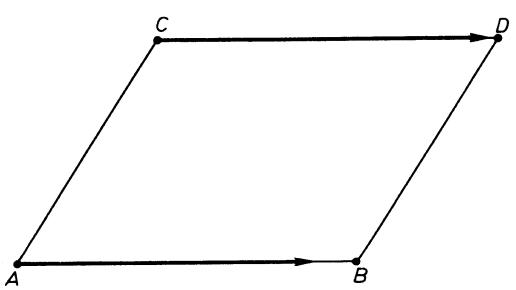


Fig. 5.12

Además D es único, pues, si existiese otro punto D' tal que $\overrightarrow{CD'} \sim \overrightarrow{AB}$, tendría que coincidir la recta CD con la recta CD', ya que por C existe una paralela única.

Por análoga razón, BD coincidirá con BD', ya que $BD \,//\, AC$ y también $BD' \,//\, AC$, luego $D \equiv D'$.

Como consecuencia de la proposición anterior resulta que hay un representante único de un vector libre con origen en cada punto del plano.

Módulo, dirección y sentido de un vector libre

Teniendo en cuenta la definición de vector libre, resulta que todos los vectores que pertenecen a un mismo vector libre tienen iguales *el módulo, la dirección y el sentido.*

Entonces se puede hablar de módulo, dirección y sentido de un vector libre, entendiendo que se refiere a cualquiera de sus representantes.

5.104. Adición de vectores libres

5.1041. *Definición*

Vamos a definir la operación *adición* entre los vectores libres de la siguiente manera:

Dados dos vectores libres $\bar{x}$ e $\bar{y}$, se consideran $\overrightarrow{AB} \in \bar{x}$, y con origen en B el vector $\overrightarrow{BC} \in \bar{y}$.

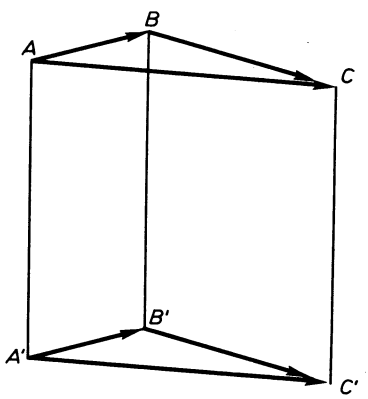


Fig. 5.13

Se define $\bar{x} + \bar{y} = \{\overrightarrow{AC}\}$. O sea, $\bar{x} + \bar{y}$ es el vector libre cuyo representante es $\overrightarrow{AC}$.

Se ha de comprobar que el resultado es único. En efecto, si se elige otro vector de $\bar{x}$, y otro de $\bar{y}$: $\overrightarrow{A'B'} \in \bar{x}$, $\overrightarrow{B'C'} \in \bar{y}$ resulta:

$$\bar{x} + \bar{y} = \{\overrightarrow{A'C'}\}$$

y se ha de verificar

$$\{\overrightarrow{AC}\} = \{\overrightarrow{A'C'}\}, \text{ es decir, } \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'},$$

cosa evidente, pues $ACC'A'A$ es un paralelogramo por tener los lados opuestos, AC, $A'C'$, iguales y paralelos.

5.1042. *Propiedades de la adición*

I) *Conmutativa*: $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$

$$\bar{x} + \bar{y} = \{\overrightarrow{AC}\}$$
$$\bar{y} + \bar{x} = \{\overrightarrow{BD}\}$$
$$\text{y } \{\overrightarrow{AC}\} = \{\overrightarrow{BD}\},$$

toda vez que $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$ pues $BDCAB$ es paralelogramo al ser $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, por hipótesis, ya que $\overrightarrow{AB} \in \bar{x} \wedge \overrightarrow{CD} \in \bar{x}$.

$\overrightarrow{AB} \in \bar{x} \quad \overrightarrow{BC} \in \bar{y}$

$\overrightarrow{CD} \in \bar{x}$

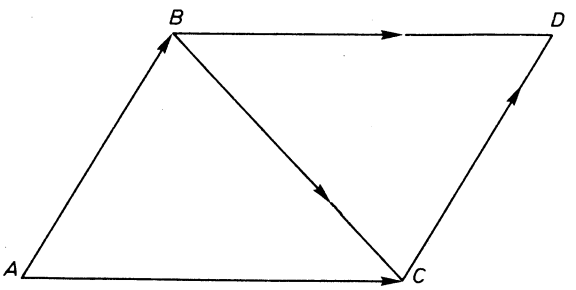


Fig. 5.14

II) *Asociativa*: $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$

$$\bar{x} + \bar{y} = \{\overrightarrow{AC}\}; \quad (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \{\overrightarrow{AC}\} + \{\overrightarrow{CD}\} = \{\overrightarrow{AD}\}$$
$$\bar{y} + \bar{z} = \{\overrightarrow{BD}\}; \quad \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = \{\overrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{BD}\} = \{\overrightarrow{AD}\}$$

luego $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$

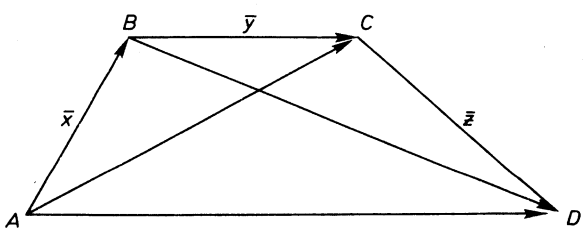


Fig. 5.15

$$\overrightarrow{AB} \in \bar{x}, \quad \overrightarrow{BC} \in \bar{y}, \quad \overrightarrow{CD} \in \bar{z}$$

III) *Elemento nulo*: $\bar{0} = \{\overrightarrow{AA}\} = \{\overrightarrow{BB}\} = \{\overrightarrow{CC}\} = \cdots$

$\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ para todo $\bar{x}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \in \bar{x} \\ \overrightarrow{BB} \in \bar{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} + \bar{0} = \{\overrightarrow{AB}\} = \bar{x}$$

IV) *Elemento opuesto*: Si $\bar{x} = \{\overrightarrow{AB}\}$ se define $-\bar{x} = \{-\overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{BA}\}$ $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$, lo que justifica la denominación de vector opuesto.

5.1043. *Estructura de* $(V_2, +)$

$V_2 = \mathcal{V}/\sim$ con la operación $+$ que se acaba de definir

$$\begin{array}{c} V_2 \times V_2 \xrightarrow{\quad + \quad} V_2 \\ (\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \bar{x} + \bar{y}, \end{array}$$

tiene estructura de *grupo abeliano*, por tener las propiedades I, II, III y IV.

5.105. Multiplicación de un número real por un vector libre

5.1051. *Definición*

Vamos a definir en primer lugar el producto de un número real por un vector fijo $\overrightarrow{AB}$.

Considérese la recta graduada de origen A, sentido positivo $\overrightarrow{AB}$, y unidad en B.

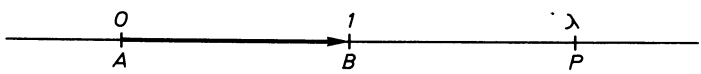


Fig. 5.16

Cuando en una recta se fija el origen y el punto unidad, existe, como se sabe, una biyección entre los puntos de la recta y los números reales; luego al número real λ le corresponde un punto único P definido sin ambigüedad.

Por definición, $\lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$.

El vector $\overrightarrow{AP}$ tendrá módulo $\overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AP}| = |\lambda|\,|\overrightarrow{AB}|$
dirección $\overrightarrow{AP}$ = dirección $\overrightarrow{AB}$
sentido $\overrightarrow{AP} = \pm$sentido $\overrightarrow{AB}$ según $\lambda \gtrless 0$

Considérese ahora un vector libre $\bar{x}$; sea $\overrightarrow{AB} \in \bar{x}$.

Se define $\lambda \cdot \bar{x} = \{\lambda \cdot \overrightarrow{AB}\}$.

Veamos que el resultado es único, o sea que, si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'} \in \bar{x}$ se sigue que

$$\{\lambda \cdot \overrightarrow{AB}\} = \{\lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}\},$$

es decir,

$$\lambda \cdot \overrightarrow{AB} \sim \lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}.$$

En efecto: $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ y $\lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}$ tienen igual módulo, dirección y sentido por tenerlos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$, luego son equipolentes, ya que forman el paralelogramo $APP'A'A$ (Fig. 5.17).

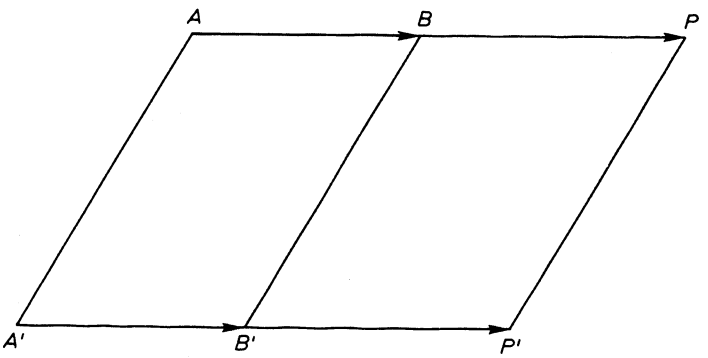


Fig. 5.17

Queda definido así un producto exterior.

$$\begin{array}{c} \mathfrak{R} \times V_2 \longrightarrow V_2 \\ (\lambda, \bar{x}) \longrightarrow \lambda\bar{x} \end{array}$$

5.1052. *Propiedades de la multiplicación de un número real por un vector*

I) $\lambda(\bar{y} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$, $\lambda \in \mathfrak{R}$.
Obsérvese la figura 5.18

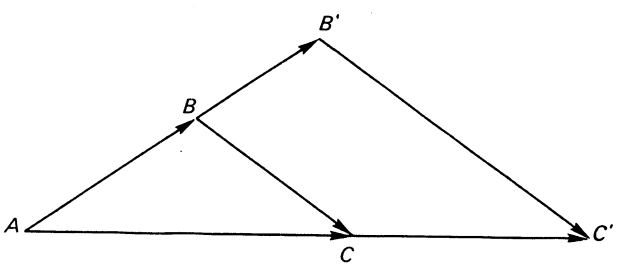


Fig. 5.18

$$\overrightarrow{AB} \in \bar{x}, \quad \overrightarrow{BC} \in \bar{y}, \quad \overrightarrow{AC} \in \bar{x} + \bar{y}$$

Si se eligen $\overrightarrow{AB'} \in \lambda\bar{x}$, $\overrightarrow{AC'} \in \lambda(\bar{x} + \bar{y})$, resultará que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes (más que semejantes, son homotéticos) de razón λ, y en consecuencia, $\overrightarrow{B'C'} \in \lambda\bar{y}$, ya que $\overrightarrow{BC} \in \bar{y}$.

Puesto que $\{\overrightarrow{AB'}\} + \{\overrightarrow{B'C'}\} = \{\overrightarrow{AC'}\}$,
resultará

$$\lambda\bar{x} + \lambda\bar{y} = \lambda(\bar{x} + \bar{y}) \quad \text{, c.q.d.}$$

II) $(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$ $\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$.

Sea $\overrightarrow{AB} \in \bar{x}$. Asignemos en la recta AB el origen al punto A, y la unidad al punto B.

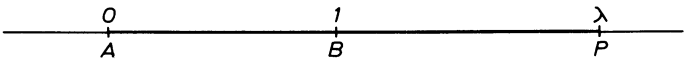


Fig. 5.19

Entre los vectores de dirección la de $\bar{x}$ (obsérvese que decimos dirección y no sentido) y los números reales existe una biyección

$$\lambda \longleftrightarrow \{\overrightarrow{AP}\}$$

λ es proporcional al módulo de $\{\overrightarrow{AP}\}$, y su signo determina el sentido de $\{\overrightarrow{AP}\}$.

Sumar los números λ y μ, con sus signos respectivos, equivale a sumar los vectores correspondientes; y esto es precisamente lo que se quiere demostrar.

III) $\lambda(\mu\bar{x}) = (\lambda\mu)\bar{x}$.

Los dos vectores tendrán la misma dirección y sentido, evidentemente.

El módulo también es igual, pues

$$|\lambda(\mu\bar{x})| = |\lambda||\mu\bar{x}| = |\lambda||\mu||\bar{x}| = |\lambda\mu||\bar{x}| = |(\lambda\mu)\bar{x}|$$

IV) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$.

Evidente, por tener ambos vectores el mismo módulo, dirección y sentido.

5.1053. *Plano vectorial. Recta vectorial*

Se denomina *plano vectorial* al grupo abeliano $(V_2, +)$ con la multiplicación por números reales que se acaba de definir.

En la multiplicación por números reales se consideran esencialmente las cuatro propiedades que hemos destacado.

El conjunto de todos los vectores de V_2 que tienen una misma dirección forman un grupo abeliano V_1 respecto de la adición de vectores libres. Este grupo es un subgrupo de V_2.

Por otra parte, es evidente que el producto de un número real por un vector de V_1 pertenece a V_1.

Esto nos sugiere la siguiente definición:

El grupo abeliano $(V_1, +)$ con la multiplicación por números reales se llama *recta vectorial.*

5.106. Dependencia e independencia lineal

Si $\bar{x} = a\bar{y}$, siendo a un número real, se dice que $\bar{x}$ *depende linealmente* de $\bar{y}$, si $\bar{x} = a\bar{y}$ resulta $\frac{1}{a}\bar{x} = \frac{1}{a}(a\bar{y}) = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)\bar{y} = 1 \cdot \bar{y} = \bar{y}$; luego también $\bar{y}$ depende linealmente de $\bar{x}$.

Diremos que dos vectores son *linealmente dependientes* si uno depende lineal-

mente del otro. Se establecerá que son *linealmente independientes* cuando no son linealmente dependientes.

Vamos a comprobar que las definiciones anteriores son equivalentes a las siguientes:

1.ª) $\bar{y}$ y $\bar{x}$ son *linealmente dependientes* si existen números reales λ, μ que no son nulos simultáneamente, tales que $\lambda\bar{x} + \mu\bar{y} = \bar{0}$.

$\Rightarrow$) Si $\bar{x} = a\bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} - a\bar{y} = \bar{0} \Leftrightarrow 1 \cdot \bar{x} + (-a)\bar{y} = \bar{0}$

En este caso se verifica $\lambda\bar{y} + \mu\bar{x} = \bar{0}$ con $\lambda = -a$, $\mu = 1$.

$\Leftarrow$) Si $\lambda\bar{y} + \mu\bar{x} = \bar{0}$ y, por ejemplo, $\mu \neq 0 \Leftrightarrow \mu\bar{x} = -\lambda\bar{y} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{\mu}(-\lambda\bar{y}) = \left[\frac{1}{\mu}(-\lambda)\right]\bar{y}; \text{ luego } \bar{x} = a\bar{y} \text{ para } a = \frac{1}{\mu}(-\lambda)$$

2.ª) $\bar{y}$ y $\bar{x}$ son *linealmente independientes* si no son linealmente dependientes, o sea, cuando $\lambda\bar{y} + \mu\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

Las definiciones anteriores se generalizan al caso de n vectores $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$. Se dicen $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ *linealmente dependientes* cuando existen números reales $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_n$ no nulos simultáneamente tales que $\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{x}_n = \bar{0}$.

Se dice que $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ son *linealmente independientes* si toda relación $\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{x}_n = \bar{0}$ implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Se establece que un vector $\bar{x}$ *depende linealmente* de los vectores $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ cuando existen números reales $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_n$, tales que $\bar{x} = \lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{x}_n$. (Esta vez no se exige que los λ_i no se anulen simultáneamente; pueden anularse todos o no.)

Se comprueba que si los vectores $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ son linealmente dependientes, por lo menos uno de ellos depende linealmente de los restantes. En efecto:

$$\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{x} = \bar{0}, \text{ con un } \lambda \neq 0, \text{ por ejemplo, } \lambda_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1\bar{x}_1 = -\lambda_2\bar{x}_2 - \cdots - \lambda_n\bar{x}_n \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{1}{\lambda_1}[-\lambda_2\bar{x}_2 \cdots - \lambda_n\bar{x}_n] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2\bar{x}_2) + \cdots + \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_n\bar{x}_n) = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\bar{x}_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\bar{x}_n.$$

Recíprocamente, si uno de los vectores $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ depende linealmente de los restantes, éstos serán linealmente dependientes.

Sea $\bar{x}_1 = \lambda_2\bar{x}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{x}_n \Rightarrow -\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{x}_n = \bar{0}$, y como el coeficiente de $\bar{x}_1$ es $-1 \neq 0$, son linealmente dependientes, c.q.d.

Ejercicio

Demostrar que $\bar{0}$ depende linealmente de cualquier conjunto de vectores.

Demostrar previamente, haciendo uso de las propiedades de grupo $(V_2, +)$, y las de multiplicación de números reales:

1) $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$ para todo $\lambda \in \mathfrak{R}$;
2) $0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$ para todo $\bar{x} \in V_2$

5.107. Base y dimensión

Consideremos dos vectores fijos $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$ cuyas rectas de posición son D y D', respectivamente (Fig. 5.20).

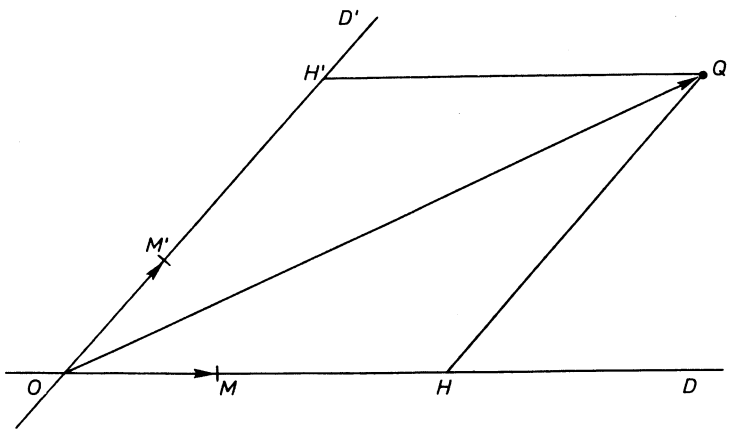


Fig 5.20

Si se traza por el extremo Q de un vector cualquiera $\overrightarrow{OQ}$ paralelas a las rectas D y D' se tendrán los puntos de intersección H' y H.

Es inmediato que $\{\overrightarrow{OQ}\} = \{\overrightarrow{OH}\} + \{\overrightarrow{OH'}\}$

$$\text{pero} \quad \left.\begin{array}{l} \{\overrightarrow{OH}\} = \{a_1 \cdot \overrightarrow{OM}\} = a_1 \{\overrightarrow{OM}\} \\ \{\overrightarrow{OH'}\} = \{a_2 \cdot \overrightarrow{OM'}\} = a_2 \{\overrightarrow{OM'}\} \end{array}\right\} \quad a_1, a_2 \in \mathfrak{R}$$

a_1 es la medida de $|\overrightarrow{OH}|$, cuando se toma como unidad $|\overrightarrow{OM}|$, con signo + ó −, según que M y H estén del mismo o distinto lado de 0.

Análogo razonamiento para a_2.

Resulta entonces $\{\overrightarrow{OQ}\} = a_1 \{\overrightarrow{OM}\} + a_2 \{\overrightarrow{OM'}\}$

Es decir, que, fijados dos vectores libres $\{\overrightarrow{OM}\}$, $\{\overrightarrow{OM'}\}$ que sean linealmente independientes (para dos vectores la independencia lineal se verifica siempre que no sean paralelos), cualquier vector $\{\overrightarrow{OQ}\}$ del plano se escribe de manera única en la forma $\{\overrightarrow{OQ}\} = a_1 \{\overrightarrow{OM}\} + a_2 \{\overrightarrow{OM'}\}$; o lo que es igual, se asocia a cada vector un par ordenado (a_1, a_2) de números reales.

Recíprocamente, (a_1, a_2) determina de manera única el vector $\{\overrightarrow{OQ}\}$.

De lo anterior se deduce que no puede haber tres vectores $(\{\overrightarrow{OQ}\}, \{\overrightarrow{OM}\}, \{\overrightarrow{OM'}\})$ que sean linealmente independientes. Aunque todavía no hemos dado la definición general de espacio vectorial, podemos decir que el plano vectorial V_2 es un espa-

cio vectorial de *dimensión dos*, porque es dos el máximo número de vectores linealmente independientes posibles en él; la *dimensión* de la recta vectorial es *uno* porque uno es el número máximo de vectores linealmente independientes.

Los vectores $(\{\overrightarrow{OM}\}, \{\overrightarrow{OM'}\})$ se dice que forman una *base* de V_2. En efecto, la definición de base es la siguiente: Dos vectores $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ de V_2 se dice que forman *base* cuando son linealmente independientes y todo vector de V_2 depende linealmente de ellos.

5.108. Coordenadas. Cambio de coordenadas

Hemos visto que, fijada una base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, existe una biyección entre los vectores libres del plano y los pares ordenados de números reales.

$$V_2 \xrightarrow{(\bar{u}_1, \bar{u}_2)} \mathfrak{R}^2$$

$$\bar{x} \longrightarrow (a_1, a_2)/\bar{x} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2$$

El par de números (a_1, a_2) constituye las *coordenadas* del vector $\bar{x}$, respecto de la base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$.

Respecto de otra base $(\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*)$, el mismo vector $\bar{x}$ tendrá otras coordenadas (b_1, b_2)

$$V_2 \xrightarrow{(\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*)} \mathfrak{R}^2$$

$$\bar{x} \longrightarrow (b_1, b_2)/\bar{x} = b_1\bar{u}_1^* + b_2\bar{u}_2^*$$

Los vectores $\bar{u}_1^*$, $\bar{u}_2^*$ que forman la segunda base tendrán unas coordenadas respecto a la primera base que representaremos (α_1, α_2), (β_1, β_2), respectivamente.

O sea:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^* &= \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 \\ \bar{u}_2^* &= \beta_1\bar{u}_1 + \beta_2\bar{u}_2 \end{aligned}$$

Conviene poder hallar las coordenadas (a_1, a_2) en función de las (b_1, b_2) y, recíprocamente,

$$\bar{x} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2$$

$$\begin{aligned} \bar{x} = b_1\bar{u}_1^* + b_2\bar{u}_2^* &= b_1(\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2) + b_2(\beta_1\bar{u}_1 + \beta_2\bar{u}_2) = \\ &= (b_1\alpha_1 + b_2\beta_1)\bar{u}_1 + (b_1\alpha_2 + b_2\beta_2)\bar{u}_2 \end{aligned}$$

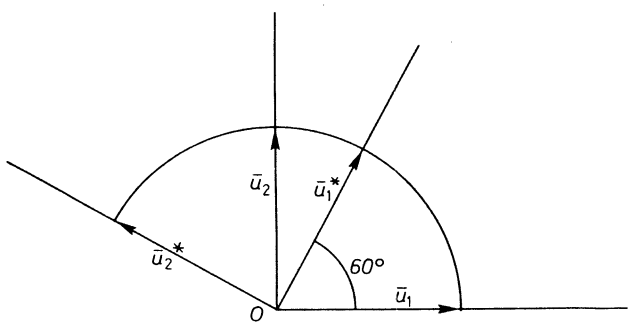
Como las coordenadas respecto de una determinada base son únicas, resulta:

$$\begin{cases} a_1 = b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 \\ a_2 = b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{cases}$$

que son las fórmulas que relacionan las coordenadas en una y otra base. Se puede despejar (b_1, b_2) en función de (a_1, a_2).

Ejercicio.

Hallar las fórmulas de cambio de coordenadas entre la base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ y $(\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*)$.



$$\begin{vmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_2 \end{vmatrix} = 1$$

Fig. 5.21

5.109. Generalización al espacio

Todo lo que se ha expuesto para el plano se generaliza al espacio de tres dimensiones. Se establecen las mismas definiciones de vector y vector libre; las mismas operaciones de adición de vectores libres, y multiplicación por un número real. Resultan las mismas propiedades. Se define el *espacio vectorial* como el grupo V_3 con la multiplicación por números reales establecida y sus cuatro propiedades.

De la misma manera que el plano vectorial tiene subconjuntos con las mismas operaciones y propiedades, a los que llamamos rectas vectoriales, se comprueba que el espacio vectorial tiene subconjuntos con las mismas operaciones y propiedades que son planos y rectas vectoriales.

5.110. Definición de espacio vectorial

La consideración de las propiedades que se han estudiado en los vectores del plano, y que se generalizan sin dificultad al espacio, lleva a la siguiente formalización:

Definición: Se dice que un grupo abeliano $(V, +)$ es un *espacio vectorial sobre* $\mathfrak{R}$ cuando se ha definido una aplicación de $\mathfrak{R} \times V$ en V que asocia a $(\lambda, \bar{x})$ el elemento $\lambda\bar{x}$ de V y verifica las propiedades siguientes:

1. $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$
2. $(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$
3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)\bar{x}$
4. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$

siendo λ y μ números reales, y $\bar{x}, \bar{y}$ elementos de V.

Los elementos de V se pueden seguir llamando vectores aunque ya no tengan

ninguna relación con segmentos orientados y pueden ser entes matemáticos de las clases más diversas.

Los elementos de $\mathfrak{R}$ se llaman escalares. Generalizando más aún, se define el espacio vectorial sobre un cuerpo K cualquiera que no tiene por qué ser $\mathfrak{R}$. Los espacios vectoriales sobre $\mathfrak{R}$ se dicen reales.

Ejemplos de espacios vectoriales

1) El conjunto de polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a dos es un espacio vectorial real respecto de la adición de polinomios y multiplicación por un número real ordinarios.

2) El conjunto $\mathfrak{R}$ de números reales es espacio vectorial real respecto de las operaciones de adición y multiplicación ordinarias.

3) El conjunto $\mathfrak{R}^n = \{(x_1 \dots x_n)/x_i \in \mathfrak{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$ respecto de las operaciones

$$(x_1 \dots x_n) + (y_1 \dots y_n) = (x_1 + y_1 \dots x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1 \dots x_n) = (\lambda x_1 \dots \lambda x_n)$$

es un espacio vectorial real.

4) Las funciones definidas en $0 \leq x \leq 1$ y tales que $2f(0) = f(1)$ forman un espacio vectorial real respecto de la adición de funciones y multiplicación por un número real ordinarios.

5) ¿Forman espacio vectorial las funciones continuas en (a, b)? Comprobarlo.

Subsisten las mismas definiciones que en espacios vectoriales ordinarios:

Se dice que un conjunto de vectores $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ son *linealmente independientes* cuando

$$\lambda_1\bar{x}_1 + \cdots + \lambda_n\bar{x}_n = \bar{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0;$$

y se establecen como *linealmente dependientes* si existen números reales $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ no todos nulos, tales que $\lambda_1\bar{x}_1 + \cdots + \lambda_n\bar{x}_n = \bar{0}$.

Ejercicios

1) En el ejemplo 1) estudiar si los polinomios t^0, t^1, t^2 son linealmente independientes.

2) En el mismo ejemplo estudiar si lo son $t + 2t^2$, $3t - 1$, $4t - 5$.

Se establece que $\bar{x}$ es *combinación lineal* de $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ o que depende linealmente de $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$, si puede expresarse en la forma $\bar{x} = \lambda_1\bar{x}_1 + \cdots + \lambda_n\bar{x}_n$.

Se dice que $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ forman una *base* de V, cuando son linealmente independientes y todo $\bar{x}$ de V es combinación lineal de $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$.

Ejercicios

1) (1,0) y (0,1) forman una base de $\mathfrak{R}^2$.

2) $(1, t, t^2)$ forman una base del espacio vectorial del ejemplo 1).

Si B es una base de V, todo elemento $\bar{x} \in V$ puede escribirse unívocamente $\bar{x} = a_1\bar{x}_1 + \cdots + a_n\bar{x}_n$.

Los números $(a_1 \ldots a_n)$ son las *coordenadas* del vector $\bar{x}$ respecto de la base B.

5.111. Dimensión de un espacio vectorial

Proposición. En un espacio vectorial todas las bases tienen el mismo número de elementos. Este número se llama dimensión del espacio.

Vamos a demostrarlo razonando con dos bases de cuatro y dos elementos, respectivamente.

Obsérvese que aunque nos referimos a bases con número determinado de elementos, el razonamiento es válido para dos bases cualesquiera con distinto número de elementos.

Sean $\mathfrak{B} = \{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$ $\quad \mathfrak{B}' = \{y_1\ y_2\}$

Veamos que si las bases $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ tienen distinto número de elementos llegamos a una contradicción.

Todos los vectores de la base $\mathfrak{B}$, por pertenecer al espacio vectorial, pueden expresarse como combinación lineal de los vectores de $\mathfrak{B}'$.

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 \end{cases}$$

De los coeficientes de y_1, sea a_{11} uno de ellos distinto de cero.

Se multiplica la primera igualdad por $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ y se suma miembro a miembro con la segunda:

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}x_1 = -a_{21}y_1 - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}y_2$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \qquad +$$

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}x_1 + x_2 = \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)y_2$$

Si se hace

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}} = b_2; \quad a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} = a_2,$$

resulta

$$b_2x_1 + x_2 = a_2y_2 \qquad [1]$$

Multipliquemos ahora, la primera igualdad por $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ y sumémosla miembro a miembro con la tercera.

$$-\frac{a_{31}}{a_{11}}x_1 = -a_{31}y_1 - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}y_2$$

$$x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \qquad +$$

$$-\frac{a_{31}}{a_{11}}x_1 + x_3 = \left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right)y_2$$

Si hacemos

$$-\frac{a_{31}}{a_{11}} = b_3; \quad a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} = a_3$$

resulta

$$b_3x_1 + x_3 = a_3y_2 \qquad [2]$$

Multipliquemos la igualdad primera por $-\frac{a_{41}}{a_{11}}$ y sumémosla miembro a miembro con la cuarta.

$$-\frac{a_{41}}{a_{11}}x_1 = -a_{41}y_1 - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{12}y_2$$

$$x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 \qquad +$$

$$-\frac{a_{41}}{a_{11}}x_1 + x_4 = \left(a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{12}\right)y_2$$

Haciendo

$$-\frac{a_{41}}{a_{11}} = b_4; \quad a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{12} = a_4$$

resulta

$$b_4x_1 + x_4 = a_4y_2 \qquad [3]$$

En las igualdades [1], [2] y [3] no interviene el vector y_1; lo hemos eliminado.

Repetimos el procedimiento para eliminar y_2:

$$\begin{cases} b_2x_1 + x_2 = a_2y_2 \\ b_3x_1 + x_3 = a_3y_2 \\ b_4x_1 + x_4 = a_4y_2 \end{cases}$$

Elegimos un coeficiente, distinto de cero, de y_2, por ejemplo, $a_2 \neq 0$.

Multiplicamos la primera por $-\frac{a_3}{a_2}$, y la sumamos con la segunda.

$$-\frac{a_3}{a_2}b_2x_1 - \frac{a_3}{a_2}x_2 = -a_3y$$

$$\frac{b_3x_1 + x_3 = a_3y \qquad +}{\left(b_3 - \frac{a_3}{a_2}b_2\right)x_1 + \left(-\frac{a_3}{a_2}\right)x_2 + x_3 = 0}$$

Si hacemos $b_3 - \frac{a_3}{a_2}b_2 = c_1$; $\quad -\frac{a_3}{a_2} = c_2$ resulta $c_1x_1 + c_2x_2 + x_3 = 0$.

No hace falta seguir el proceso para la primera y tercera igualdad, pues hemos llegado a una relación del tipo

$$c_1x_1 + c_2x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$$

que es una *contradicción*, pues $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ forman base y no pueden ser linealmente dependientes, cosa que ocurre puesto que el coeficiente de x_3 es $1 \neq 0$.

Es necesario resaltar que se ha podido llegar a establecer una relación lineal entre los vectores de $\mathfrak{B}$, *porque tiene mayor número de vectores que* $\mathfrak{B}'$. En el supuesto de que ambas bases tuvieran el mismo número de vectores, *no sería posible* eliminar los elementos de $\mathfrak{B}'$ para obtener una relación entre los de $\mathfrak{B}$.

Esta propiedad se extiende incluso a espacios vectoriales de dimensión infinita. En este caso, todas las bases han de tener el mismo número cardinal (transfinito) de elementos.

5.112. Subespacios vectoriales de un espacio vectorial

Si existe un subconjunto V', de V, que es espacio vectorial para las mismas operaciones de V, se dice que V' es un *subespacio vectorial de* V.

Refiriéndonos a los ejemplos del número 5.110:

1) En el ejemplo 1). Son subespacios vectoriales

{polinomios de grado menor o igual a 1}

y

{constantes}

2) En el ejemplo 2). Es subespacio vectorial el conjunto $\{0\}$.

3) En el ejemplo 3). Es subespacio vectorial el conjunto

$$\{(x_1, 0, \ldots, 0)/x_1 \in \mathcal{R}\}.$$

4) En el ejemplo 4). Es subespacio vectorial el conjunto de funciones lineales $y = a(x + 1) \quad 0 \leq x \leq 1$.

Consecuencia de la definición es que si V'' es subespacio vectorial de V' y a su vez, V' es subespacio vectorial de V, resulta que V'' es subespacio vectorial de V.

Los subespacios del plano vectorial son $\{\vec{0}\}$ y las rectas vectoriales.

Los subespacios del espacio vectorial ordinario son $\{\vec{0}\}$, las rectas vectoriales y los planos vectoriales.

5.113. Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales

Nota preliminar. Nos parece oportuno establecer, usando el lenguaje de la vida ordinaria, el concepto de LINEALIDAD.

Sea un conjunto de causas y sus efectos correspondientes, que suponemos bien determinados, es decir, que dada la causa se sigue el efecto automáticamente. Diremos que esa correspondencia causa → efecto es *lineal*, si se verifican las dos condiciones siguientes:

1. El conjunto de dos causas produce como efecto el conjunto de los dos efectos de cada causa por separado.
2. Si se duplica (o se multiplica por cualquier número) la causa, lo mismo ocurre con el efecto.

Ejemplo

Mercancías de un supermercado y su coste. La correspondencia

cesta de la compra → coste

es lineal

Con esta idea previa de la linealidad abordamos su formalización.

Sean V y V' dos espacios vectoriales (sobre el mismo cuerpo); se dice que una aplicación f de V en V' es *lineal* si se verifica

$$1) \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$2) \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

La aplicación lineal recibe también el nombre de *homomorfismo*.

Ejemplo

Sea el plano vectorial V_2, y la recta vectorial V_1 contenida en el plano.

A cada vector de V_2 hagámosle corresponder su proyección sobre V_1.

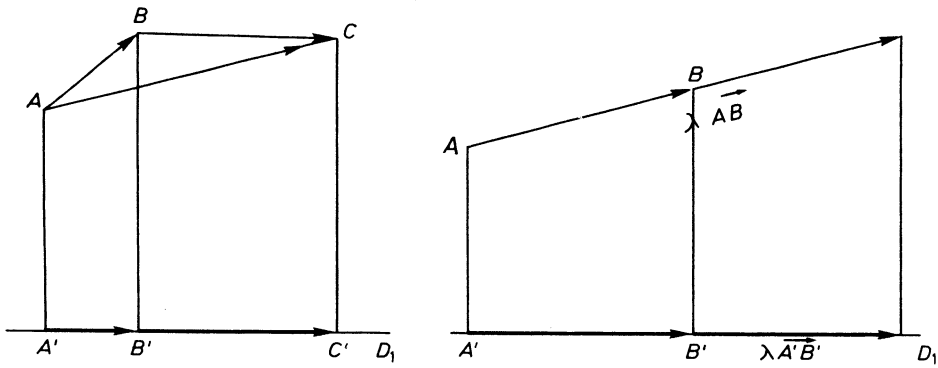


Fig. 5.22

Sea la dirección de V_1 la de la recta fija D_1.

Si $\{\overrightarrow{AB}\}$ es un vector de V_2, le hacemos corresponder $\{\overrightarrow{A'B'}\}$ o sea $f(\{\overrightarrow{AB}\}) = \{\overrightarrow{A'B'}\}$.

Se verifica:

1) $f(\{\overrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{BC}\}) = f(\{\overrightarrow{AC}\}) = \{\overrightarrow{A'C'}\} = \{\overrightarrow{A'B'}\} + \{\overrightarrow{B'C'}\} = f(\{\overrightarrow{AB}\}) + f(\{\overrightarrow{BC}\})$

2) $f(\lambda\{\overrightarrow{AB}\}) = f(\{\lambda \cdot \overrightarrow{AB}\}) = \{\lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}\} = \lambda\{\overrightarrow{A'B'}\} = \lambda \cdot f(\{\overrightarrow{AB}\})$

5.114. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

5.1141.
Demuéstrese que es homomorfismo la aplicación

$$\mathcal{R}^n \xrightarrow{f} \mathcal{R}$$
$$(x_1\ x_2 \ldots x_n) \longrightarrow (x_1, 0, \ldots, 0)$$

5.1142.
Si

$$P_3 = \{\text{polinomios de grado} \leq 3\}$$
$$P_2 = \{\text{polinomios de grado} \leq 2\}$$

demuéstrese que la aplicación «derivación» es aplicación lineal entre los espacios vectoriales P_3 y P_2.

$$P_3 \xrightarrow{D} P_2$$
$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \longrightarrow 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2$$

5.1143.

Si representamos por $C[a, b] = \{\text{funciones continuas en } [a, b]\}$, demuéstrese que la integración de Riemann es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales $C[a, b]$ y $\mathcal{R}$.

$$C[a, b] \xrightarrow{\int_a^b} \mathcal{R}$$
$$f(x) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

5.1144.

Sea $C^1[a, b] = \{\text{funciones con derivada primera continua en } [a, b]\}$. Demuéstrese que la operación «derivación» es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales $C^1[a, b]$ y $C[a, b]$.

5.1145.

Demuéstrese que el conjunto de polinomios de grado menor o igual a dos es un espacio vectorial real.

5.1146.

Demuéstrese que el conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ es un espacio vectorial real.

5.1147.

Estúdiese si los números racionales con la adición y multiplicación ordinarias forman un espacio vectorial sobre Q.

5.1148.

Analícese si los números complejos con la adición y multiplicación ordinarias forman un espacio vectorial real.

5.1149.

Justifíquese si las funciones escalonadas forman espacio vectorial.

5.2

Matrices. Determinantes

5.201. Matrices. Definición

5.202. Operaciones con matrices del mismo orden

5.2021. *Adición en* $M_{n\times m}$
5.2022. *Multiplicación de un número real por una matriz*
5.2023. *Espacio vectorial* $M_{n\times m}$ *y base canónica*
5.2024. *Multiplicación de matrices. Propiedades*

5.203. Anillo de las matrices cuadradas $M_{n\times n}$

5.204. Inversiones de una permutación

5.205. Determinante. Definición

5.206. Determinantes de segundo y tercer orden. Regla de Sarrus

5.207. Propiedades de los determinantes

5.208. Adjunto y menor complementario de un elemento

5.209. Matriz inversa de una matriz cuadrada

5.210. Menores de una matriz. Menor orlado

5.211. Combinaciones lineales de filas y columnas. Rango de una matriz

5.212. Proposiciones relativas a dependencia lineal de filas y columnas

5.213. Teorema del rango

5.214. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

5.2

Matrices. Determinantes

5.201. Matrices. Definición

Una matriz es un conjunto de números dispuestos ordenadamente en un cuadro. Toda tabla de doble entrada es una matriz.

Al iniciar el estudio no se puede apreciar la utilidad del álgebra matricial y la gran simplificación que introduce en multitud de ramas de la matemática. Las operaciones con matrices surgen de una manera natural aunque parecen artificiosas. En capítulos posteriores se podrá comprobar parte de su utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y en las transformaciones geométricas.

Sobre la idea que hemos esbozado al principio vamos a establecer la definición matemática, precisa, de matriz.

Sea $I = \{1, 2, \ldots, n\}$; $J = \{1, 2, \ldots, m\}$. Consideremos el conjunto producto cartesiano

$$I \times J = \{(1, 1) \ldots (1, m)(2, 1) \ldots (2, m) \ldots (n, 1) \ldots (n, m)\}$$

Sea f una aplicación de $I \times J$ en el conjunto de números reales $\mathfrak{R}$. (También se puede considerar sobre el conjunto Q de números racionales.)

$$\begin{aligned} I \times J &\xrightarrow{f} \mathfrak{R} \\ (1, 1) &\longrightarrow f(1, 1) = a_{11} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n, m) &\longrightarrow f(n, m) = a_{nm} \\ (i, j) &\longrightarrow f(i, j) = a_{ij} \end{aligned}$$

Esta aplicación se llama *matriz de orden* $n \times m$.
Se suele escribir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nm} \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz se representa por una letra mayúscula y las imágenes de la aplicación se disponen en filas y en columnas. Si la matriz es de orden $n \times m$ quiere decir que tiene n filas y m columnas.

Obsérvese que el cuadro de números define completamente la aplicación, pues dado un elemento cualquiera $(i, j) \in I \times J$ está determinada su imagen a_{ij}.

En forma abreviada se puede escribir

$$A = (a_{ij}); \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \text{ es una matriz de orden } 2 \times 3.$$

$$I = \{1, 2\} \quad J = \{1, 2, 3\}$$

$$I \times J = \{(1, 1)(1, 2)(1, 3)(2, 1)(2, 2)(2, 3)\}$$

$$\begin{array}{lll} (1, 1) \to 3 & (1, 2) \to 5 & (1, 3) \to 7 \\ (2, 1) \to 2 & (2, 2) \to 4 & (2, 3) \to -8 \end{array}$$

Dos matrices son *iguales* cuando tienen el mismo orden y son iguales los términos correspondientes; o sea: Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se tiene:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m$$

Estas condiciones de igualdad son consecuencia de la definición de aplicaciones iguales.

5.202. Operaciones con matrices del mismo orden

Sea $M_{n \times m} = \{\text{conjunto de matrices de orden } n \times m\}$.
Se definen dos operaciones sobre $M_{n \times m}$.

5.2021. *Adición en* $M_{n \times m}$.

Si $A \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nm} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12} \ldots b_{1m} \\ b_{21}b_{22} \ldots b_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}b_{n2} \ldots b_{nm} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \ldots a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \ldots a_{2m} + b_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} \ldots a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

En notación abreviada: $A = (a_{ij}) \wedge B = (b_{ij}) \Rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
Según esta definición, resultan inmediatas las propiedades siguientes:

I. *Conmutativa*: $A + B = B + A$,
pues $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A$,
por la propiedad conmutativa de los números reales.

II. *Asociativa*: $A + (B + C) = (A + B) + C$,
pues $A + (B + C) = (a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}]) = ([a_{ij} + b_{ij}]) + c_{ij}) = (A + B) + C$,
por la propiedad asociativa de los números reales.

III. *Existe elemento cero*:

$$0 = \left.\begin{pmatrix} \overbrace{0\,0 \ldots 0}^{m} \\ 0\,0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0\,0 \ldots 0 \end{pmatrix}\right\} n = (0)$$

Se verifica $A + 0 = A$, para todo A.

IV. *Existe elemento opuesto*: Si $A = (a_{ij})$ será $-A = (-a_{ij})$,
pues se verifica $A + (-A) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) = 0$.

A la vista de las cuatro propiedades registradas, se establece que el conjunto $M_{n \times m}$, dotado de la adición, tiene estructura de grupo abeliano.

5.2022. *Multiplicación de un número real por una matriz*

Se define $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} \ldots \lambda a_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_{n1} \ldots \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$; o sea

si $A = (a_{ij}) \Rightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij})$.
Esta operación externa tiene las siguientes propiedades:

I'. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
pues $(\lambda + \mu)(a_{ij}) = ((\lambda + \mu)a_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) + (\mu a_{ij}) =$
$= \lambda(a_{ij}) + \mu(a_{ij})$.

II'. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
pues $\lambda(a_{ij} + b_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}) = (\lambda a_{ij}) + (\lambda b_{ij}) = \lambda(a_{ij}) + \lambda(b_{ij})$.

III'. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
pues $\lambda(\mu a_{ij}) = (\lambda\mu a_{ij}) = (\lambda\mu)(a_{ij})$.

IV'. $1 \cdot A = A$,
evidente, pues $1 \cdot (a_{ij}) = (1 \cdot a_{ij}) = (a_{ij})$.

5.2023. *Espacio vectorial $M_{n\times m}$ y base canónica*

De las propiedades anteriores y de la condición de grupo abeliano se sigue que $M_{n\times m}$ es un espacio vectorial real.

$$\text{Sean } U_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad U_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad U_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que las matrices $\{U_{11}\ U_{12} \dots U_{nm}\}$ forman una base de $M_{n\times m}$. En efecto:

i) Estos elementos de $M_{n\times m}$ son *linealmente independientes*, pues

$$\lambda_{11}U_{11} + \lambda_{12}U_{12} + \dots + \lambda_{nm}U_{nm} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}\lambda_{12} \dots \lambda_{1m} \\ \lambda_{21}\lambda_{22} \dots \lambda_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n}\ \lambda_{n2} \dots \lambda_{nm} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{11} = \dots = \lambda_{nm} = 0$$

ii) Cualquier elemento $A \in M_{n\times m}$ *depende linealmente* de $\{U_{11}U_{12} \dots U_{nm}\}$,

pues, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \end{pmatrix}$, resultará $A = a_{11}U_{11} + \dots + a_{nm}U_{nm}$

$M_{n\times m}$ es un espacio vectorial de dimensión $n \times m$, ya que la base $\{U_{11}U_{12} \dots U_{nm}\}$ tiene $n \times m$ elementos.

5.2024. *Multiplicación de matrices. Propiedades*

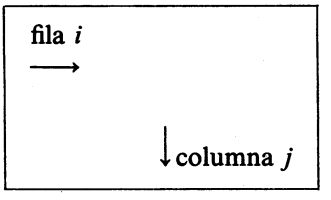
Se define una aplicación de $M_{n\times m} \times M_{m\times p}$ en $M_{n\times p}$ que se llama *multiplicación*.

$$\underset{M_{n\times m}}{\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \end{pmatrix}} \times \underset{M_{m\times p}}{\begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1p} \\ \dots\dots\dots \\ b_{m1} \dots b_{mp} \end{pmatrix}} = \underset{M_{n\times p}}{\begin{pmatrix} c_{11} \dots c_{1p} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n1} \dots c_{np} \end{pmatrix}}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

Para calcular el término c_{ij} del producto se multiplica término a término la

fila i del primer factor por la columna j del segundo, y se suma, según lo que indica el esquema.



Para que sea posible el producto de dos matrices $A \times B$, ha de ser igual el número de columnas de A al número de filas de B.

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ de orden } n \times m \\ B \text{ de orden } m \times p \end{array}\right\} \quad A \times B \text{ de orden } n \times p$$

Ejemplos

1) $M_{2\times 3} \times M_{3\times 1} \longrightarrow M_{2\times 1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1 + 0\times 0 + 1\times 2 \\ 2\times 1 + 1\times 0 + 5\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2) $M_{2\times 2} \cdot M_{2\times 3} \longrightarrow M_{2\times 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 4 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

3) $M_{21} \times M_{1\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

4) $M_{1\times 3} \times M_{3\times 1} \longrightarrow M_{1\times 1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (11)$$

Suponiendo que la multiplicación sea posible, resultan las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

$$A = (a_{ij}) \text{ de orden } n \times m$$
$$B = (b_{ij}) \text{ de orden } m \times p$$
$$C = (c_{ij}) \text{ de orden } p \times q$$

$$A \times B = (\alpha_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

$$(A \times B) \times C = (\gamma'_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

$$\gamma'_{ij} = \sum_{h=1}^{p} \alpha_{ih} c_{hj} = \sum_{h=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj}$$

$$\begin{aligned} \gamma'_{ij} = {} & (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{im}b_{m1})\, c_{1j} + && h = 1 \\ & + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{im}b_{m2})\, c_{2j} + && h = 2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \ldots + a_{im}b_{mp})\, c_{pj} && h = p \end{aligned}$$

$$B \times C = (\beta_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} c_{kj} \left(\beta_{kj} = \sum_{h=1}^{p} b_{kh} c_{hj} \right)$$

$$A \times (B \times C) = (\gamma_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \beta_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \left(\sum_{h=1}^{p} b_{kh} c_{hj} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} = {} & a_{i1}(b_{11}c_{ij} + b_{12}c_{2j} + \ldots + b_{1p}c_{pj}) + && k = 1 \\ & + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \ldots + b_{2p}c_{pj}) + && k = 2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{im}(b_{m1}c_{1j} + b_{m2}c_{2j} + \ldots + b_{mp}c_{pj}) && k = m \end{aligned}$$

Como se ve, γ_{ij} se compone de los mismos sumandos que γ'_{ij} agrupados de modo distinto, luego $\gamma_{ij} = \gamma'_{ij}$.

O sea

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C), \quad \text{c.q.d.}$$

2. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2} \cdots a_{nm} \end{pmatrix}$, consideramos la matriz cuadrada de orden m cuya diagonal principal está formada por 1 y los demás elementos 0:

$$I = \begin{pmatrix} 1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots 1 \end{pmatrix}; \quad A \times I = A$$

Existe otro I' análogo al anterior, de orden n, tal que $I' \times A = A$.

3. Propiedad distributiva respecto de la adición.

$$A(B + C) = A \times B + A \times C$$

En efecto:

$$A(B + C) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj}\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj}\right) = A \times B + A \times C.$$

5.203. Anillo de las matrices cuadradas $M_{n\times n}$

Entre matrices cuadradas del mismo orden, siempre es posible la multiplicación y el resultado es otra matriz cuadrada del mismo orden.

Teniendo en cuenta que $M_{n\times n}$ es grupo abeliano para la adición y las propiedades 1, 2 y 3 de la multiplicación, resulta que $M_{n\times n}$ es un *anillo con elemento unidad.*

5.204. Inversiones de una permutación

Consideremos n elementos que pueden ser los n primeros números naturales. Con estos n elementos se pueden formar $n!$ permutaciones.

La permutación en la que se encuentran los elementos en el orden natural se llamará *permutación principal* y será $(1, 2, 3, \ldots, n)$.

Dada una permutación cualquiera, por ejemplo $(3, 2, 1, \ldots, n)$, si nos fijamos en los elementos 3 y 1, resulta que están en orden distinto al orden en que aparecen en la permutación principal; es decir, en la permutación principal están, primero el 1 y luego el 3, y aquí, al contrario. Se dice entonces, que forman *inversión.* Si estuviesen en igual orden que en la permutación principal, se diría que forman *sucesión.*

Una permutación es de *clase par* cuando es par el número de sus inversiones. Una permutación es de *clase impar* si es impar el número de sus inversiones.

Para calcular el número de inversiones de una permutación, basta comparar cada elemento de la permutación con todos los que le siguen.

Ejemplos

Dada (1 2 3 4 5 6) como permutación principal, calculemos el número de inversiones de las permutaciones siguientes:

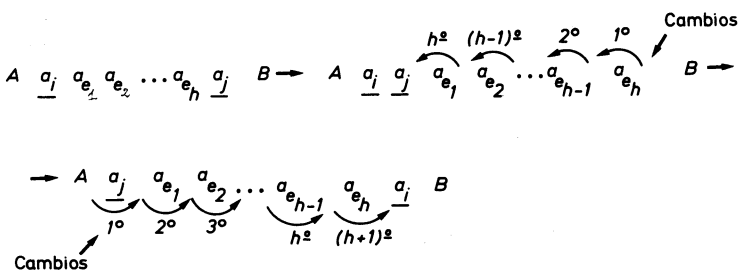
1) $(2\ 5\ 4\ 3\ 1\ 6) \Rightarrow$ Inversiones $\left\{\begin{matrix} 21 \\ 54\ 53\ 51 \\ 43\ 41 \\ 31 \end{matrix}\right\}$ 7 en total

2) $(6\ 5\ 4\ 1\ 2\ 3) \Rightarrow$ Inversiones $\left\{\begin{matrix} 65\ 64\ 61\ 62\ 63 \\ 54\ 51\ 52\ 53 \\ 41\ 42\ 43 \end{matrix}\right\}$ 12 en total

Proposición. Si se cambian entre sí dos elementos, la permutación cambia de clase.

Demostración. Si son consecutivos y formaban sucesión, al cambiarlos entre sí formarán inversión, y viceversa; luego la permutación pierde o gana una inversión. Respecto de los demás elementos, no cambian las inversiones; luego en definitiva cambia de clase.

En el caso de que entre los elementos que se intercambian existan h elementos, el intercambio equivale a efectuar $2h + 1$ cambios de elementos consecutivos cada uno de los cuales hace cambiar la clase de la permutación, luego al final queda una permutación de clase contraria, ya que $2h + 1$ es impar.



Proposición. De las n *permutaciones, la mitad son de clase par y la otra mitad son de clase impar.*

Demostración. Fijémonos en dos determinados elementos en todas las $n!$ permutaciones. Si cambiamos estos elementos entre sí, cada permutación par se transforma en una impar, según la proposición anterior, y viceversa. Al efectuar este intercambio, volvemos a obtener las $n!$ permutaciones dadas, pues hay $n!$ y todas son distintas, ya que si hubiese dos iguales lo serían las dos permutaciones de donde proceden, contra la hipótesis.

Como a cada permutación par se le hace corresponder una impar y viceversa, sucede que hay tantas permutaciones pares como impares, c.q.d.

5.205. Determinante. Definición

Considérese una matriz cuadrada de orden n. Se puede formar un producto

de n elementos, entre los n^2 de la matriz, eligiendo los elementos de forma que no haya dos de la misma fila ni dos de la misma columna. Necesariamente tendrá que haber uno de cada fila y uno de cada columna.

Sean los n factores $a_{i_1 j_1}\ a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$. Los subíndices que indican las filas forman una permutación $(i_1 i_2 \ldots i_n)$ de los números $(1, 2, \ldots, n)$; asimismo los que indican las columnas $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ forman otra permutación.

Si ambas permutaciones $(i_1 i_2 \ldots i_n)$, $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ son de la misma clase (par o impar), asignamos al producto $a_{i_1 j_1}\ a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$ el signo $+$; si son de distinta clase, el signo $-$.

Se pueden escribir los factores ordenados por filas $a_{1 j_1}\ a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}$. En este caso $(1\ 2 \ldots n)$ es permutación par. Luego si $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ es permutación par le corresponde el signo $+$, y si es impar el signo $-$.

NOTA. Es de observar que el signo de un producto $a_{i_1 j_1}\ a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$ no depende del orden de los factores, pues cada vez que se cambia dos factores entre sí la permutación $(i_1 i_2 \ldots i_n)$ cambia de clase, pero también la $(j_1 j_2 \ldots j_n)$; luego si eran de la misma clase siguen siéndolo al alterar el orden de los factores. Por esto es posible escribir el producto en la forma $a_{1 j_1}\ a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}$.

Definición. Se llama *determinante* de una matriz cuadrada de orden n al número obtenido al sumar todos los productos posibles de n términos, tales que no haya dos de la misma fila ni dos de la misma columna con el signo $+$ o $-$ según que sean de la misma o distinta clase las permutaciones de los índices que indican filas y columnas.

El determinante se representa

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Al término $a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ de la suma que define el determinante se le llama *diagonal principal* por el lugar que ocupan los factores.

La otra diagonal se llama *diagonal secundaria.*

Si representamos por $\mathcal{S} = \{\text{permutaciones de } (1, 2, \ldots, n)\}$ se puede escribir

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \ldots j_n) \in \mathcal{S}} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j n} (-1)^{\gamma},$$

donde $\gamma = 1$ si $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ es impar y $\gamma = 2$ si $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ es par.

Un determinante de orden n da en su desarrollo $n!$ sumandos, la mitad con signo $+$ y la mitad con signo $-$ (por la segunda proposición del apartado anterior).

5.206. Determinantes de segundo y tercer orden. Regla de Sarrus

1) Determinante de una matriz cuadrada de segundo orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Regla de Sarrus. El valor del determinante es igual a la diagonal principal menos la diagonal secundaria.

2) Determinante de una matriz cuadrada de tercer orden.

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regla de Sarrus. El valor del determinante es igual a la diagonal principal más el producto de los términos de cada paralela con el vértice opuesto, menos la diagonal secundaria menos el producto de los términos de cada paralela con el vértice opuesto.

5.207. Propiedades de los determinantes

I. *Si se cambian filas por columnas en una matriz cuadrada, su determinante no varía.*

En efecto, todo sumando del primer determinante está formado por el producto de n términos, uno de cada fila y uno de cada columna, luego pertenece también al segundo. Las dos permutaciones que corresponden a filas y columnas en el segundo son las mismas que corresponden a columnas y filas en el primero; luego el signo de dicho sumando será + o − en ambos determinantes, según sean de la misma o distinta clase. Por lo tanto, las sumas, o lo que es lo mismo, el valor del determinante, son iguales por tener los mismos sumandos con los mismos signos.

II. *Si cambiamos entre sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo.*

Razonemos con columnas. (Análogo para filas.)

Considérese un sumando $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ del primer determinante; al cambiar dos columnas entre sí, por ejemplo. la primera y segunda, el sumando anterior pertenece al nuevo determinante con la diferencia de que a_{1j_1} se ha convertido en el elemento $(1j_2)$, que llamaremos a'_{1j_2}, y el a_{2j_2} en el elemento $(2j_1)$, que llamaremos a'_{2j_1}, o sea $a'_{1j_2}a'_{2j_1}a_{3j_3}\cdots a_{njn}$, siendo $a'_{1j_2} = a_{1j_1}$ y $a'_{2j_1} = a_{1j_2}$.

El signo ha cambiado puesto que la permutación que indica columnas es $(j_2j_1j_3\cdots j_n)$ en vez de $(j_1j_2j_3\cdots j_n)$, o sea, de distinta clase. Si cada sumando cambia de signo, el valor del determinante también lo hace, c.q.d.

III. *Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es nulo.*

Para fijar ideas, supongamos un determinante de tercer orden

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Al cambiar entre sí la segunda y tercera filas, cambiará el signo por II, luego

$$-\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

de donde resulta $\Delta = -\Delta$, o sea, $\Delta = 0$, c.q.d.

IV. *Si se multiplican (o dividen) todos los términos de una fila o una columna de una matriz cuadrada por un número λ, el valor del determinante queda multiplicado (o dividido) por λ.*

Es consecuencia de que en cada sumando hay un elemento de cada fila, y se puede sacar factor común a λ o $1/\lambda$, respectivamente.

V. *Si una fila de un determinante está formada por términos que son suma de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes obtenidos sustituyendo los términos por los primeros y segundos sumandos respectivamente, o sea*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ b_{21}b_{22}b_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

Es consecuencia de que en el desarrollo del determinante cada sumando tiene un término de cada fila, por tanto tendrá un término de la fila segunda que se descompone en dos sumandos por la propiedad distributiva. Agrupando los primeros sumandos obtenemos el primer determinante, y agrupando los segundos, el segundo determinante. O sea,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33}(b_{22}+c_{22}) + a_{12}a_{31}(b_{23}+c_{23}) +$$

$$+ a_{13}a_{32}(b_{21}+c_{21}) - a_{13}a_{31}(b_{22}+c_{22}) - a_{11}a_{32}(b_{23}+c_{23}) - a_{12}a_{33}(b_{21}+c_{21})$$

= [conjunto de términos en que intervienen como factor los b] +

+ [ídem en que intervienen los c] =

$$= \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ b_{21}b_{22}b_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{c.q.d.}$$

VI. *Si en una matriz cuadrada una fila es suma de varias multiplicadas por factores cualesquiera, su determinante es nulo.* (*Análogo, para columnas.*) Es consecuencia de III, IV y V.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda a + \mu\alpha & \lambda b + \mu\beta & \lambda c + \mu\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \mu\alpha & \mu\beta & \mu\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

VII. *Si a una fila de una matriz cuadrada se le suman otras filas multiplicadas por factores cualesquiera, la nueva matriz tiene el mismo determinante. (Análogo, enunciado para columnas.)*

Es consecuencia de III, IV y V.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda a_2 + \mu a_1 & b_3 + \lambda b_2 + \mu b_1 & c_3 + \lambda c_2 + \mu c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_1 b_1 c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$$

5.208. Adjunto y menor complementario de un elemento

Fijémonos en un elemento a_{lk} de una matriz cuadrada. En el desarrollo del determinante existirán unos sumandos que contienen al elemento a_{lk}. Si se extrae factor común a a_{lk} de los sumandos que le contienen, llamaremos *adjunto* de a_{lk} a la suma a la cual multiplica a_{lk}.

El adjunto de a_{lk} se representa A_{lk}.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Consideremos los términos en que figura $\underline{a_{12}}$ y saquémosle factor común.

$$a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} = a_{12}\underbrace{(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})}_{\parallel \; A_{12}}$$

Según esta definición, resulta que un determinante es igual a la suma de los productos de los términos de una fila por sus adjuntos correspondientes.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

Análogamente, un determinante es igual a la suma de los términos de una columna por sus adjuntos correspondientes.

Ahora se puede demostrar más fácilmente la propiedad V del apartado anterior.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (b_{21}+c_{21})A_{21} + (b_{22}+c_{22})A_{22} +$$

$$+ (b_{23}+c_{23})A_{23} = (b_{21}A_{21} + b_{22}A_{22} + b_{23}A_{23}) + (c_{21}A_{21} + c_{22}A_{22} + c_{23}A_{23}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ b_{21}b_{22}b_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

Proposición. La suma de los productos de los adjuntos de una fila por los elementos de otra fila es igual a cero. (Análogo, enunciado para columnas.)

Razonemos sobre el determinante de orden 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

luego también será

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ \alpha \quad \beta \quad \gamma \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = \alpha A_{21} + \beta A_{22} + \gamma A_{23}$$

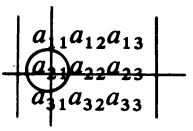
pero si en vez de α, β, γ que son números cualesquiera tomamos los elementos $a_{31}a_{32}a_{33}$ resultará

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ \underbrace{a_{31}a_{32}a_{33}} \end{vmatrix} = a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0$$

0 por tener dos filas iguales

Si en un determinante suprimimos la fila l y la columna k, el determinante de orden inferior en una unidad que resulta se denomina *menor complementario* del elemento a_{lk} y se representa α_{lk}.

Ejemplo



$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

Se demuestra que el adjunto A_{lk} es igual al menor complementario α_{lk} con signo + o − según que $l + k$ sea par o impar (prescindimos de la demostración para no alargar la exposición) o sea $A_{lk} = (-1)^{l+k} \alpha_{lk}$.

5.209. Matriz inversa de una matriz cuadrada

Se va a efectuar el razonamiento con una matriz de orden 3, pero teniendo en cuenta que es válido cualquiera que sea el orden.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix}$. Se dice que la matriz A es *regular* cuando su determinante es distinto de cero.

Se dice que una matriz es *singular* cuando su determinante es igual a cero. Supóngase que A es regular o sea $|A| \neq 0$.

Formemos la matriz B.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Los $A_{11}\ A_{12} \ldots$ son los adjuntos de $a_{11}\ a_{12} \ldots$ respectivamente. Si se multiplica $A \times B$ resultará

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{\frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{|A|}}^{//\,|A|} & \overbrace{\frac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}}{|A|}}^{//\,0} \\ \overbrace{\frac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}}{|A|}}^{//\,0} & \overbrace{\frac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{33}A_{33}}{|A|}}^{//\,|A|} \\ \overbrace{\frac{a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13}}{|A|}}^{//\,0} & \overbrace{\frac{a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23}}{|A|}}^{//\,0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\frac{a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}}{|A|}}^{//\,0} \\ \overbrace{\frac{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33}}{|A|}}^{//\,0} \\ \overbrace{\frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{|A|}}^{//\,|A|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{matriz unidad} = I$$

(Basta aplicar las conclusiones del apartado anterior para comprobar los valores 0 ó $|A|$ que se indican.)

Queda establecido que $A \times B = I$. Y, análogamente, $B \times A = I$.

A la matriz B se la llama matriz inversa de A y se representa A^{-1}.

Se ha supuesto que A es regular y ha quedado demostrado que existe matriz inversa; es decir, que la regularidad es *condición suficiente*. Pero además es necesaria. En efecto: La fórmula de Binet-Cauchy establece que si A, B son matrices cuadradas del mismo orden se verifica

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

(La demostración de la anterior fórmula pertenece a la teoría de los determinantes y se sale de los límites fijados para esta materia en el presente libro.)

Supongamos que A tiene matriz inversa B, o sea $A \times B = I$. Por la fórmula de Binet-Cauchy

$$1 = |I| = |A \times B| = |A| \times |B|,$$

luego

$$|A| \neq 0, \quad \text{c.q.d.}$$

La matriz que admite inversa se dice *inversible*; por lo tanto

$$\text{matriz regular} \Leftrightarrow \text{matriz inversible}$$

Ejercicio

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden inversibles, demostrar que $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB. Consecuencia: Las matrices inversibles de orden n forman grupo respecto al producto. ¿Forman cuerpo? ¿Por qué no? (No es cerrado respecto de la adición.)

5.210. Menores de una matriz. Menor orlado

Dada una matriz de orden $n \times m$, consideremos h filas y h columnas de la matriz. Los elementos comunes a estas h filas y h columnas forman una matriz cuadrada que se llamará *una menor* de la matriz dada, y su determinante, *un menor* de la matriz dada.

Ejemplos

1)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

Los elementos comunes a las dos filas y dos columnas señalados formarán la menor

$$\begin{pmatrix} a_{12}a_{14} \\ a_{32}a_{34} \end{pmatrix} \quad \text{y el menor} \quad \begin{vmatrix} a_{12}a_{14} \\ a_{32}a_{34} \end{vmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Una menor $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; un menor $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

Dado un determinante menor de una matriz formado por h filas y h columnas se llama *menor orlado* al determinante de orden $h + 1$ formado por las anteriores

filas y una cualquiera de las restantes, y las anteriores columnas y una cualquiera de las restantes.

Ejemplo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \downarrow & \downarrow & & \\ 1.^a & 2.^a & 3.^a & 4.^a & 5.^a & 6.^a & 7.^a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 & 0 & -5 & 10 & -16 \\ -15 & 1 & 3 & 4 & 11 & -17 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & -9 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 6 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a \\ 4.^a \end{array}$$

Sea el menor $\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 9 & -9 \end{vmatrix}$, formado por las

$$\left.\begin{array}{l} \text{filas: } 2.^a \text{ y } 3.^a \\ \text{columnas: } 4.^a \text{ y } 5.^a \end{array}\right\}$$

Escribamos alguno de los *menores orlados* del menor anterior:

1.º) Con la fila primera y la columna séptima

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -16 \\ \boxed{\begin{matrix} 4 & 11 \\ 9 & -9 \end{matrix}} & & 2 \\ & & 3 \end{vmatrix}$$

2.º) Con la fila primera y la columna primera

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -15 & \boxed{\begin{matrix} 4 & 11 \\ 9 & -9 \end{matrix}} & \\ 6 & & \end{vmatrix}$$

3.º) Con la fila cuarta y la columna sexta

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & 11 \\ 9 & -9 \end{matrix}} & & -17 \\ & & 5 \\ 0 & 6 & -1/2 \end{vmatrix}$$

5.211. Combinaciones lineales de filas y columnas. Rango de una matriz

Dada una matriz de orden $n \times m$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nm} \end{pmatrix},$$

sus filas pueden considerarse vectores de $\mathcal{R}^m$ y sus columnas vectores de $\mathcal{R}^n$.

Puesto que en $\mathfrak{R}^m$ y $\mathfrak{R}^n$ es posible sumar vectores y multiplicarlos por un número real, tienen sentido las definiciones siguientes:

Se dice que *una fila es combinación lineal* de otra, cuando resulta de sumarlas previamente multiplicadas por factores cualesquiera. Es decir, cuando es combinación lineal, al considerarlas como vectores de $\mathfrak{R}^m$.

Ejemplos

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 12 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

La cuarta fila es combinación lineal de las tres primeras, pues

$$(12\ 9\ 1) = (2\ 5\ -1) + (4\ 3\ 2) + (6\ 1\ 0)$$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & 16 & 8 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

La segunda fila es combinación lineal de la primera y tercera, pues

$$(2\ 16\ 8) = 3(2\ 6\ 3) + (-1)(4\ 2\ 1)$$

Análogamente se dice que *una columna es combinación lineal* de otras cuando resulta de sumarlas previamente multiplicadas por números cualesquiera.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 19 \\ 0 & \sqrt{3} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Puesto que

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

la tercera columna es combinación lineal de las dos primeras.

Se llama *rango o característica* de una matriz al orden del menor no nulo de mayor orden. Si el rango es r se llama *menor principal* a un menor no nulo de orden r.

5.212. Proposiciones relativas a dependencia lineal de filas y columnas

Proposición 1. *Si una fila de una matriz es combinación lineal de h filas, todos los determinantes menores que se pueden formar con dichas $h+1$ filas son nulos. Análogamente, para columnas.*

Esto es debido a que un determinante que tiene una fila combinación lineal de otras es nulo (propiedad VI).

Proposición 2. *Sea* $|A| \neq 0$ *un determinante de orden h de una matriz. Si todos los menores obtenidos orlando* $|A|$ *con la fila l y cada una de las columnas de la matriz son nulos, se puede asegurar que la fila l es una combinación lineal de aquéllas. Análogamente, para columnas.*

Supongamos que A está formado por las h primeras filas y las h primeras columnas. (Se hace esta suposición para fijar ideas, habida cuenta de que no quita generalidad al razonamiento.)

Sea el menor orlado

$$\Delta = \text{fila } l \rightarrow \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hh} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{hj} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{l1} & \dots & a_{lh} \end{matrix} & a_{lj} \end{vmatrix}$$

columna j

Si $j = 1, 2, \dots, h \Rightarrow \Delta = 0$, por tener dos columnas iguales.

Si $j = h + 1, \dots, m \Rightarrow \Delta = 0$, por hipótesis.

Luego para *todo valor de j* es $\Delta = 0$.

Desarrollando el determinante por los elementos de la última columna resulta:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{hj}A_{hj} + a_{lj}|A| = 0$$

luego

$$a_{lj} = -\frac{A_{1j}}{|A|}a_{1j} - \frac{A_{2j}}{|A|}a_{2j} - \cdots - \frac{A_{hj}}{|A|}a_{hj}$$

Como para todo j es válida esta relación, queda demostrado que la primera fila es combinación lineal de las restantes.

Proposición 3. *Si r es el rango y A un menor principal, todas las filas (columnas) de la matriz son combinaciones lineales de las r filas (columnas) que figuran en A.*

Esta proposición es una consecuencia inmediata de la proposición 2.

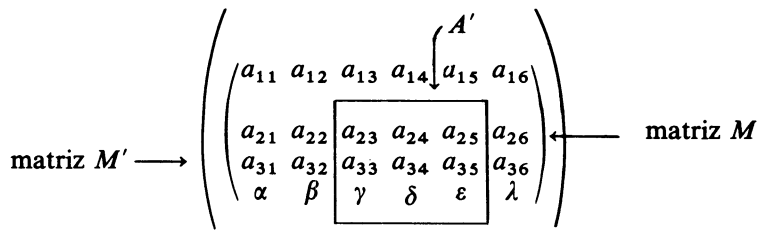
5.213. Teorema del rango

El rango de una matriz es igual al rango de la matriz obtenida añadiendo a la matriz dada una fila que sea combinación lineal de las restantes filas. Análogo, enunciado para columnas.

Demostración. Sea M una matriz de rango r, y M' la matriz obtenida aña-

diendo a la matriz dada una fila que sea combinación lineal de otras filas. Los menores de orden $r + 1$ de M' que sean también de M son nulos puesto que por hipótesis M es de rango r.

Los únicos menores de orden $r + 1$ de M' que no figuran en M son aquellos en los que interviene la fila nueva. Vamos a comprobar que estos menores son nulos también. En efecto: sea A' uno de estos menores



La última fila de M' (letras griegas) es combinación lineal de filas de M. Pueden ocurrir dos casos:

1. Los menores de orden r formados con las r filas de M que intervienen en A' son todos nulos. En este caso, si se desarrolla A' por los elementos de la última fila, $A' = \gamma A_\gamma + \delta A_\delta + \varepsilon A_\varepsilon$; pero los adjuntos A_γ, A_δ, A_ε son menores de orden r (prescindiendo del signo) de las r filas citadas, luego $A' = 0$.

2. Existe un menor principal de M entre los que se pueden formar con las r filas de M que intervienen en A'. En este caso resulta que:

a) La fila nueva es, por hipótesis, combinación lineal de filas de M.

b) Todas las filas de M son combinación lineal de las filas de un menor principal (véase proposición 3), es decir de las r filas de M que intervienen en A'.

c) Por la transitividad de la dependencia lineal resulta que la nueva fila es una combinación lineal de las r filas de M que intervienen en A'.

Consecuencia de *c*) es que $A' = 0$ (por la propiedad VI de los determinantes).

Si todos los menores de orden $r + 1$ de M' son nulos, lo serán los de orden $r + 2$, $r + 3$, etc., pues cada menor se puede desarrollar por una fila y es igual a una suma de menores de orden inferior en una unidad. Resulta $r(M') = r(M)$, c.q.d.

En los ejercicios prácticos se verá que la aplicación de este teorema y las proposiciones anteriores permiten calcular el rango de la matriz.

5.214. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

5.2140.

Efectúese la suma

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

5.2141.

Efectúense los productos

$$a)\quad (1, 3)\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix} =$$

$$b)\quad \begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix} =$$

$$c)\quad (1\ 0\ 5)\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix} =$$

5.2142.

Calcúlese:

$$\begin{vmatrix}5 & 7\\ 3 & 4\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 7\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 5 & 6 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 5 & 6\end{vmatrix}$$

5.2143.

Hállese la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

5.2144.

Determínese el rango de las matrices siguientes y escríbase algún menor principal de cada una de ellas

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 3 & 2 & 0\\ 5 & 5 & -2 & -1 & -4\\ 11 & 12 & 1 & 1 & -4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 3\\ 4 & -2 & 8 & 7\\ 6 & -3 & 12 & 10\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 3\\ 2 & 0 & -4 & 6\\ 3 & 0 & -10 & 9\end{pmatrix}$$

5.2145.

Resuélvase la ecuación

$$\begin{vmatrix}2x+1 & x & 2x+1\\ 3x-1 & 2x+1 & 4x\\ 4x & 3x-1 & 6x-1\end{vmatrix} = 0$$

5.2146.

Sean los determinantes

$$A_0 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & x \\ -1 & -9 & x^2 \end{vmatrix}; \quad A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & x^2 \\ 27 & 1 & x^3 \end{vmatrix}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -27 & -x^3 \\ -1 & 3 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) Determínense las raíces de la ecuación $A_0 = 0$

b) Justifíquese que A_1 y A_2 son múltiplos de A_0.

c) Resuélvanse las ecuaciones $A_1 = 0$ y $A_2 = 0$.

5.2147.

Sin realizar su desarrollo, justifíquese que es nulo el determinante

$$\begin{vmatrix} b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \\ a+b & c & 1 \end{vmatrix}$$

5.2148.

Justifíquese, sin desarrollar, la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

5.2149.

Demuéstrese que la igualdad que se facilita es correcta, sin necesidad de desarrollar los determinantes.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & p+q+r & r+p \\ x+y & y+z & x+z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

5.3

Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché

5.31. Sistemas de ecuaciones lineales. Definiciones

5.32. Sistemas de *n* ecuaciones con *n* incógnitas

5.33. Resolución en el caso general de un sistema de ecuaciones lineales. Teorema de Rouche-Frobenius

5.34. Sistemas homogéneos

5.35. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

5.3

Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché

5.31. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. DEFINICIONES

Se llama *sistema de ecuaciones lineales* a un conjunto de expresiones de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right\} \qquad [1]$$

en donde a_{ij}, $c_i \in \mathfrak{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Las letras $x_1\ x_2 \ldots x_n$ se llaman *incógnitas* y representan números reales desconocidos que pueden existir o no existir, como veremos.

Se llama *solución* del sistema [1] a todo conjunto $(p_1\ p_2 \ldots p_n)$ de n números reales, que puede interpretarse como un vector del espacio n-dimensional $\mathfrak{R}^n$, tal que se verifiquen las igualdades siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n = c_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n = c_m \end{array}\right\} \qquad [2]$$

Resolver un sistema es averiguar si tiene soluciones y, en caso afirmativo, hallarlas todas.

Los sistemas que poseen solución se llaman *compatibles* y los que no la poseen *incompatibles*.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.

Si

$$\begin{aligned} L_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - c_1 = 0 \\ L_2 &= a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - c_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - c_m = 0 \end{aligned}$$

se verifica

1) $\left.\begin{matrix} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ L_m = 0 \end{matrix}\right\}$ sistema equivalente a $\left\{\begin{matrix} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ L_m = 0 \\ \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_m L_m = 0 \end{matrix}\right.$

2) $\left.\begin{matrix} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ L_m = 0 \end{matrix}\right\}$ sistema equivalente a $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_m L_m = 0 \\ L_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ L_m = 0 \end{matrix}\right.$

Estas dos propiedades son de demostración sencilla, casi evidentes; no obstante, se aconseja, como ejercicio, razonarlas con todo detalle.

5.32. SISTEMAS DE *n* ECUACIONES CON *n* INCOGNITAS

Razonemos, en primer lugar, sobre dos ecuaciones con dos incógnitas.

Sea el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

Para usar notación matricial llamaremos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$$

El sistema puede escribirse $Ax = c$.

Supóngase que A es una matriz regular o sea $|A| \neq 0$. En este caso existirá la matriz inversa A^{-1}, luego

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}c; \quad \text{o sea} \quad x = A^{-1}c$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \end{pmatrix}, \quad \text{luego} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{c_1A_{11} + c_2A_{21}}{|A|} \\ \dfrac{c_1A_{12} + c_2A_{22}}{|A|} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{c_1A_{11} + c_2A_{21}}{|A|} \\ x_2 = \dfrac{c_1A_{12} + c_2A_{22}}{|A|} \end{cases}$$

Como $|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$, sucede que $c_1A_{11} + c_2A_{21}$ es igual al determinante que resulta al sustituir a_{11} y a_{21} por c_1 y c_2, respectivamente, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}, \quad \text{luego} \quad \begin{vmatrix} c_1a_{12} \\ c_2a_{22} \end{vmatrix} = c_1A_{11} + c_2A_{21}$$

Análogo razonamiento para la segunda incógnita:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22}, \quad \text{luego} \quad \begin{vmatrix} a_{11}c_1 \\ a_{21}c_2 \end{vmatrix} = c_1A_{12} + c_2A_{22}$$

Resulta así la siguiente

Regla de Cramer

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{matrix}\right\} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

El sistema tiene solución única

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}c_1 \\ a_{21}c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}}$$

La *regla de Cramer* se aplica al caso de tres ecuaciones con tres incógnitas y en general a n ecuaciones con n incógnitas. La demostración es enteramente análoga.

En todos los casos se requiere que la matriz de los coeficientes de las incógnitas sea regular.

Para el caso de tres ecuaciones con tres incógnitas resultaría

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

La solución única es

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12}a_{13} \\ c_2 & a_{22}a_{23} \\ c_3 & a_{32}a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}c_1 & a_{13} \\ a_{21}c_2 & a_{23} \\ a_{31}a_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}c_1 \\ a_{21}a_{22}c_2 \\ a_{31}a_{32}c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}}$$

Escríbase como ejercicio el caso de n ecuaciones con n incógnitas.

5.33. RESOLUCION EN EL CASO GENERAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES. TEOREMA DE ROUCHE-FROBENIUS

Sea el sistema considerado al principio

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Formemos la matriz de los coeficientes y la matriz de éstos, ampliada con los términos constantes

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix} = (M_1) \qquad \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n}c_1 \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n}c_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn}c_m \end{pmatrix} = (M_2)$$

Si el sistema tiene solución, ambas matrices tienen el mismo rango. En efecto, si existe solución, la columna $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$ de (M_2) es una combinación lineal de las restantes columnas, luego las matrices (M_1) y (M_2) tienen el mismo rango (ver teorema del rango).

Recíprocamente, si el rango es el mismo el sistema tiene solución. Supongamos $r(M_1) = r(M_2) = r$. Sea A un menor principal de M_2. Podemos suponer que A está formado por las r primeras filas y las r primeras columnas, lo cual no quita generalidad, pues basta alterar el orden de las ecuaciones e incógnitas.

Llamaremos *incógnitas principales* a las r primeras (en general serán las incógnitas y ecuaciones correspondientes a A).

Puesto que cada una de las m-r restantes filas de la matriz M_2 son *combinación lineal de las r primeras* (proposición 3, número 5.212) pueden suprimirse por la equivalencia de sistemas 1) del apartado 5.31.

Luego el sistema es equivalente a

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = c_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n, \end{matrix}$$

llamado *subsistema principal*, tal que

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1r} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}a_{r2}\dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Para cada conjunto arbitrario de valores que demos a las incógnitas no principales obtenemos una solución única para las incógnitas principales por aplicación de la regla de Cramer.

Podemos enunciar el siguiente importante

TEOREMA *de Rouché-Frobenius*

1. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que la matriz de los coeficientes de las incógnitas y la matriz ampliada con los términos constantes tengan igual rango.
2. Si se verifica la igualdad de rangos y

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

es un menor principal la solución del sistema es

Primera columna

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n & a_{12} \dots a_{1r} \\ c_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n & a_{22} \dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n & a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix}}$$

Segunda columna

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n & \dots a_{1r} \\ a_{21} & c_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n & \dots a_{2r} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{r1} & c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n & \dots a_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_r = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots & c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21} a_{22} \dots & c_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} a_{r2} \dots & c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix}}$$

r-ésima columna

Si el sistema es compatible y en el subsistema principal el número de incógnitas no principales es cero, el sistema es *determinado*, es decir, tiene solución única.

En los demás casos es *indeterminado*, en el sentido de que tiene infinitas soluciones.

5.34. SISTEMAS HOMOGENEOS

Un sistema de ecuaciones lineales, tal que los términos constantes son todos nulos se llama *sistema homogéneo*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Todo sistema homogéneo tiene solución, pues se verifica para $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$; es decir, todo sistema homogéneo es compatible. No obstante se dice que es *compatible* cuando tiene una solución distinta de la *solución trivial* $(0, 0, \ldots, 0)$.

Si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una solución del sistema, también lo es $(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$ para $\forall \lambda \in \mathfrak{R}$.

Es fácil de comprobar la siguiente

Proposición. Si un sistema homogéneo tiene más incógnitas que ecuaciones es compatible.

Finalmente vamos a estudiar un teorema que tendrá aplicación en capítulos posteriores.

> TEOREMA (*de compatibilidad*). *La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas sea compatible es que el determinante de los coeficientes de las incógnitas sea igual a cero.*

En efecto, sea

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Si

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

podemos resolverlo por la regla de Cramer y tiene solución UNICA que es, precisamente, la solución trivial $(0, 0, \ldots, 0)$.

Por lo tanto, si el sistema tiene soluciones distintas de la solución trivial el determinante de los coeficientes ha de ser *cero*.

Recíprocamente, si el determinante de los coeficientes es cero tiene por lo menos una fila que es combinación lineal de las restantes filas (por la proposición 3, apartado 13, capítulo anterior) e igualmente la ecuación correspondiente será una combinación lineal de las otras, luego podremos prescindir de ella. El sistema que resulta de suprimir una ecuación tendrá mayor número de incógnitas que de ecuaciones, luego, por la proposición anterior, es compatible, c.q.d.

Resumiendo,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right\} \quad \text{compatible} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

5.35. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

5.350.

Resuélvanse los sistemas

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3 \\ 6x_1 + 2x_2 = 4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \\ x_1 + 4x_2 = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 + 5x_2 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 = 20 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 = 7 \end{array}\right\}$$

5.351.

Resuélvanse los sistemas homogéneos

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

5.352.

Determínese el valor de m que hace compatible el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{l} mx_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Resuélvase.

(Adviértase que la compatibilidad de ese sistema homogéneo es referible a que admita soluciones distintas a la trivial (0, 0, 0).)

5.353. Discútase el sistema

$$\left.\begin{aligned} mx_1 + nx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + mnx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ny + mx_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

en función de los valores de los parámetros m y n.

Resolución.

5.354.

Determínese el valor de p que hace compatibles las ecuaciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= p \\ 2x_2 - x_3 &= p \\ x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_3 &= 11 \end{aligned}\right\}$$

Resolución.

5.355.

Analícese el siguiente sistema en función de los diferentes valores del parámetro μ.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \mu x_3 &= 1 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 &= 1 \\ \mu x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

5.356.

Discusión y resolución del sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 &= 0 \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

5.357.

Analícese el siguiente sistema en función de los diferentes valores de a.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ ax_1 + 2x_3 &= 0 \\ ax_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

5.358.

Se sabe que el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 - kx_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 &= 0 \\ kx_1 - x_2 + 13x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

es compatible. Determínese k.

5.359.

Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x_1 + (2\lambda - \mu)x_2 = \lambda + \mu - 3 \\ 5x_1 + 4x_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Calcúlense los valores de λ y μ que hacen el sistema compatible indeterminado.

5.4

Multiplicación escalar. Multiplicación vectorial. Funciones vectoriales

5.401. Introducción

5.402. Multiplicación escalar de vectores

5.403. Propiedades de la multiplicación escalar

5.404. Expresión analítica del producto escalar

5.405. Bases ortogonales y ortonormales

5.406. Generalización a dimensión tres

5.407. Multiplicación escalar en un espacio vectorial cualquiera

5.408. Espacio vectorial euclídeo

5.409. Multiplicación vectorial en V_3

5.410. Propiedades de la multiplicación vectorial

5.411. Expresión analítica del producto vectorial

5.412. Triple producto escalar. Interpretación geométrica. Expresión analítica

5.413. Función vectorial

5.414. Derivada de una función vectorial

5.415. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

5.4

Multiplicación escalar en espacios vectoriales. Multiplicación vectorial en el espacio vectorial geométrico ordinario tridimensional. Funciones vectoriales

5.401. Introducción

En este capítulo se va a estudiar la «multiplicación escalar» en los espacios vectoriales ordinarios de dos y tres dimensiones, para generalizar a continuación al espacio vectorial abstracto de cualquier dimensión, incluso infinito-dimensional.

Finalmente abordaremos el estudio de otro tipo de multiplicación sobre el espacio vectorial tridimensional ordinario, que se llama «multiplicación vectorial». Esta última se estudia por el interés que tiene para el estudio de la Mecánica.

Asimismo, se añaden unas nociones de funciones vectoriales, por la misma razón.

5.402. Multiplicación escalar de vectores

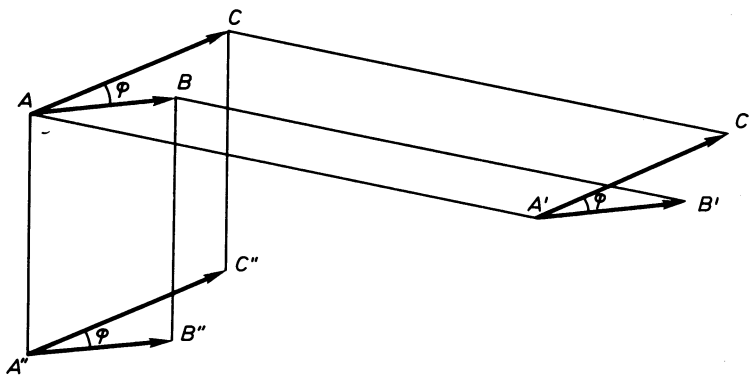
Considérese el espacio vectorial formado por todos los vectores libres del plano al que designaremos por V_2, como es habitual. Vamos a definir una aplicación de $V_2 \times V_2$ en $\mathfrak{R}$ que llamaremos *multiplicación escalar*.

$$V_2 \times V_2 \dashrightarrow \mathfrak{R}$$
$$(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \overline{xy} = |\bar{x}||\bar{y}| \cos \varphi; \quad \varphi = \widehat{\bar{x}\,\bar{y}}$$

El ángulo φ es el ángulo que forman los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$, es decir, el ángulo formado por los representantes que tienen de origen un punto A cualquiera.

Puede comprobarse en la figura, por un razonamiento geométrico sencillo,

que el ángulo φ es independiente del punto A, A', A'', etc., que se tome como origen de los representantes $\bar{x}$ e $\bar{y}$.



$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A''B''} \in \bar{x}$

$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A''C''} \in \bar{y}$

Fig. 5.23

A cada par de vectores $(\bar{x}, \bar{y})$, mediante la anterior multiplicación, hacemos corresponder un número real al que llamamos su *producto escalar*.

Consecuencias de la definición:

a) El producto escalar es nulo cuando alguno de los vectores es $\bar{0}$ o cuando son perpendiculares.

En efecto:

$$0 = \bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}| \cos (\hat{\bar{x}\bar{y}}) \Rightarrow |\bar{x}| = 0 \vee |y| = 0 \vee \cos (\hat{\bar{x}\bar{y}}) = 0,$$

o sea:

$$(|\bar{x}| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}) \vee (|\bar{y}| = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{0}) \vee \vee \left(\cos (\hat{\bar{x}\bar{y}}) = 0 \Leftrightarrow \hat{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\pi}{2}\right)$$

b) La condición necesaria y suficiente para que dos vectores (distintos de $\bar{0}$), sean perpendiculares es que su producto escalar sea cero. Es consecuencia de *a*).

c) El módulo de un vector viene determinado por $|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$, ya que $\bar{x} \cdot \bar{x} = |\bar{x}||\bar{x}| \cos 0° = |\bar{x}|^2$.

d) El ángulo de dos vectores queda fijado por

$$\cos (\hat{\bar{x}\bar{y}}) = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}\sqrt{\bar{y} \cdot \bar{y}}}$$

5.403. Propiedades de la multiplicación escalar

1. $\underline{\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}.}$

En efecto, $\cos(\widehat{\bar{y}\bar{x}}) = \cos(\widehat{\bar{x}\bar{y}})$, pues dos ángulos opuestos tienen el mismo coseno, luego

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}| \cos(\widehat{\bar{x}\bar{y}}) = |\bar{y}||\bar{x}| \cos(\widehat{\bar{y}\bar{x}}) = \bar{y} \cdot \bar{x}, \qquad \text{c.q.d.}$$

2. $\underline{(\lambda\bar{x})\bar{y} = \lambda(\bar{x}\bar{y}).}$

En efecto,

$$(\lambda\bar{x})\bar{y} = |\lambda\bar{x}||\bar{y}| \cos(\widehat{\lambda\bar{x}, \bar{y}}) = |\lambda||\bar{x}||\bar{y}| \cos(\widehat{\lambda\bar{x}, \bar{y}}) \qquad [1]$$

Puede ocurrir

$$\lambda > 0 \Rightarrow |\lambda| = \lambda \wedge \cos(\widehat{\lambda\bar{x}, \bar{y}}) = \cos(\widehat{\bar{x}, \bar{y}})$$

$(\widehat{\bar{x}\ \bar{y}}) = (\widehat{\lambda\ \bar{x}, \bar{y}})$

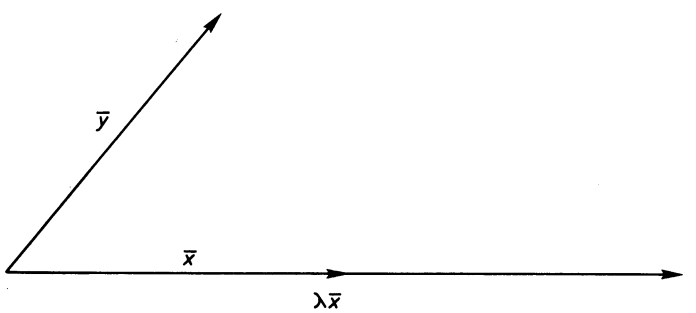


Fig. 5.24

o bien

$$\lambda < 0 \Rightarrow |\lambda| = -\lambda \wedge \cos(\widehat{\lambda\bar{x}, \bar{y}}) = -\cos(\widehat{\bar{x}, \bar{y}})$$

$(\widehat{\bar{x}\ \bar{y}}) = \pi - (\widehat{\bar{x}, \bar{y}})$

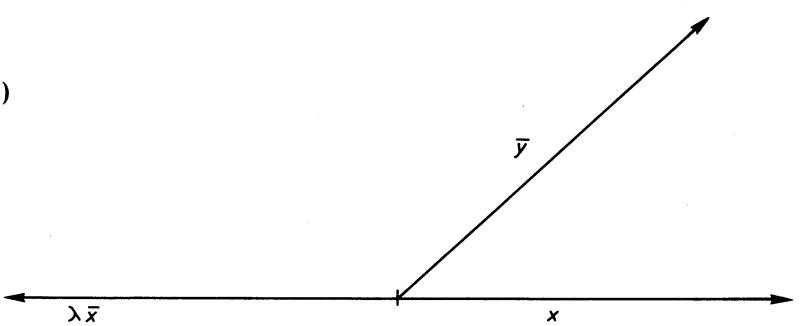


Fig. 5.25

En ambos casos, la expresión [1] es igual a

$$\lambda|\bar{x}||\bar{y}|\cos(\widehat{\bar{x}\bar{y}}) = \lambda(\widehat{\bar{x}\bar{y}}), \qquad \text{c.q.d.}$$

3. $\bar{x}(\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z}$.

En efecto,

$$\bar{x}(\bar{y} + \bar{z}) = |\bar{x}||\bar{y} + \bar{z}|\cos(\widehat{\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}}) = |\bar{x}| \cdot |\overrightarrow{AC'}| = |\bar{x}|(|\overrightarrow{AB'}| + |\overrightarrow{B'C'}| =$$
$$= |\bar{x}|(|\bar{y}|\cos(\widehat{\bar{x}\bar{y}}) + |\bar{z}|\cos(\widehat{\bar{x}\bar{z}})) = |x||y|\cos(\widehat{\bar{x}\bar{y}}) + |\bar{x}||\bar{z}|\cos(\widehat{\bar{x}\bar{z}}) =$$
$$= \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z}$$

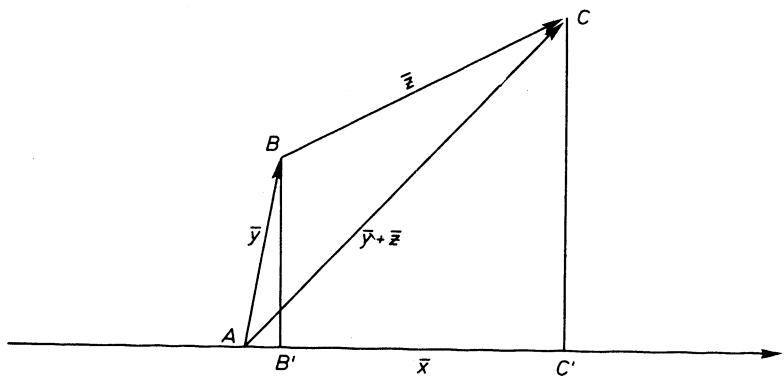


Fig. 5.26

4. $\bar{x} \cdot \bar{x} > 0$ si $\bar{x} \neq \bar{0}$, pues $\bar{x} \cdot \bar{x} = |\bar{x}|^2 > 0$.
$\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$ si $\bar{x} = 0$, pues $\bar{0} \cdot \bar{0} = |\bar{0}|^2 = 0$.

Las propiedades de la multiplicación que se acaban de estudiar se denominan

1. $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$ — CONMUTATIVA
2. $(\lambda\bar{x})\bar{y} = \lambda(\bar{x}\bar{y})$ (homogénea)
3. $\bar{x}(\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z}$ (aditiva o distributiva) — LINEAL
4. $\bar{x} \cdot \bar{x} > 0$ para $x \neq 0$, $\bar{0} \cdot \bar{0} = 0$ — POSITIVA

5.404. Expresión analítica del producto escalar

En el espacio vectorial V_2 consideramos una base $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2)$. Vamos a hallar la expresión analítica del producto escalar $\bar{x}\bar{y}$ en función de las coordenadas de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ respecto de la base $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2)$.

Para la deducción de la fórmula que da el producto escalar se hace uso *exclusivamente* de las propiedades del producto escalar, antes deducidas.

Sea

$$\bar{x} = (x_1 x_2), \qquad \bar{y} = (y_1 y_2)$$

es decir,

$$\bar{x} = x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2, \quad \bar{y} = y_1\bar{u}_1 + y_2\bar{u}_2$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\bar{x}\bar{y} &= (x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2)(y_1\bar{u}_1 + y_2\bar{u}_2) = \\
&\overset{\text{(pr. 3)}}{=} (x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2)(y_1\bar{u}_1) + (x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2)(y_2u_2) = \\
&\overset{\text{(pr. 1)}}{=} (y_1\bar{u}_1)(x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2) + (y_2\bar{u}_2)(x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2) = \\
&\overset{\text{(pr. 2)}}{=} y_1[\bar{u}_1(x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2)] + y_2[\bar{u}_2(x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2)] = \\
&\overset{\text{(pr. 3)}}{=} y_1[\bar{u}_1(x_1\bar{u}_1) + \bar{u}_1(x_2\bar{u}_2)] + y_2[\bar{u}_2(x_1\bar{u}_1) + \bar{u}_2(x_2\bar{u}_2)] = \\
&\overset{\text{(pr. 2)}}{=} y_1[x_1(\bar{u}_1\bar{u}_1) + x_2(\bar{u}_1\bar{u}_2)] + y_2[x_1(\bar{u}_2\bar{u}_1) + x_2(\bar{u}_2\bar{u}_2)] \overset{*}{=} \\
&= x_1y_1(\bar{u}_1\bar{u}_1) + x_1y_2(\bar{u}_1\bar{u}_2) + x_2y_1(\bar{u}_2\bar{u}_1) + x_2y_2(\bar{u}_2\bar{u}_2)
\end{aligned}$$

Es decir, que el producto escalar está definido en función de los productos escalares

$$\bar{u}_1\bar{u}_1, \ \bar{u}_1\bar{u}_2, \ \bar{u}_2\bar{u}_1, \ \bar{u}_2\bar{u}_2$$

o sea, de la matriz

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1\bar{u}_1 & \bar{u}_1\bar{u}_2 \\ \bar{u}_2\bar{u}_1 & \bar{u}_2\bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

que se representa

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \qquad u_{ij} = \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j, \qquad ij = 1, 2$$

y se denomina *matriz fundamental* de la multiplicación escalar respecto de la base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$.

El producto escalar podemos escribirlo en la forma matricial

$$\bar{x}\bar{y} = (x_1 x_2) \quad U \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

1. Determinar la matriz correspondiente a la base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$

$$\begin{aligned}
u_{11} &= \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 = |\bar{u}_1|^2 = 4 \\
u_{22} &= \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 = |\bar{u}_2|^2 = 25 \\
u_{12} &= \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 = u_{21} = \\
&= |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2| \cos 30^\circ = \\
&= 2 \times 5 \times \sqrt{3/2} = 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

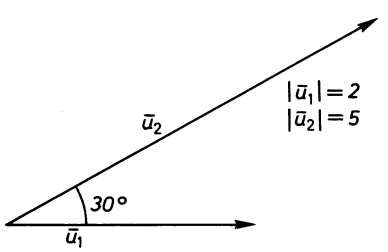


Fig. 5.27

* Por las propiedades distributiva y asociativa de los números reales.

luego

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 25 \end{pmatrix}$$

2. Calcular el producto escalar de los vectores

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= 2\bar{u}_1 - 5\bar{u}_2 \\ \bar{y} &= 3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 \end{aligned}\right\} \quad \bar{x}\bar{y} = (2, -5)\begin{pmatrix} 4 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (8 - 25\sqrt{3},\ 10\sqrt{3} - 125)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 24 - 75\sqrt{3} + 40\sqrt{3} - 500 = -476 - 35\sqrt{3}$$

3. Hallar el módulo de los vectores anteriores

$$|\bar{x}|^2 = \bar{x} \cdot \bar{x} = (2, -5)\begin{pmatrix} 4 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (8 - 25\sqrt{3},\ 10\sqrt{3} - 125)\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$= 16 - 50\sqrt{3} - 50\sqrt{3} + 625 = 641 - 100\sqrt{3};\ |\bar{x}| = \sqrt{641 - 100\sqrt{3}}$$

$$|y|^2 = \bar{y}\bar{y} = (3, 4)\begin{pmatrix} 4 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (12 + 20\sqrt{3},\ 15\sqrt{3} + 100)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 36 + 60\sqrt{3} + 400 = 436 + 120\sqrt{3};\ |\bar{y}| = \sqrt{436 + 120\sqrt{3}}$$

4. Hallar el ángulo que forman

$$\cos\varphi = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = \frac{-476 - 35\sqrt{3}}{\sqrt{641 - 100\sqrt{3}}\ \sqrt{436 + 120\sqrt{3}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos \frac{-476 - 35\sqrt{3}}{\sqrt{641 - 100\sqrt{3}}\ \sqrt{436 + 120\sqrt{3}}};$$

el valor de φ en grados o radianes se determinaría haciendo uso de las tablas de logaritmos o de la regla de cálculo.

5.405. Bases ortogonales y ortonormales

Una base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ se dice *ortogonal* cuando $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son perpendiculares, es decir, $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0$. En este caso la matriz fundamental es de la forma

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

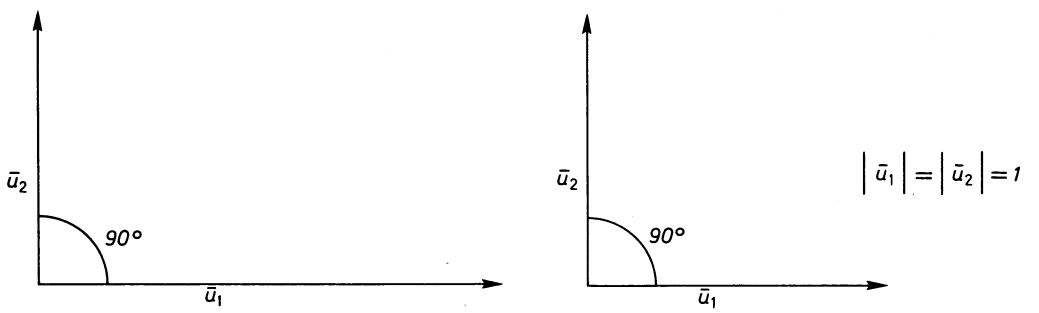
es decir, una matriz *diagonal.*

Una base se dice *ortonormal* cuando $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son perpendiculares y tienen módulo unidad, o sea $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0 \wedge |\bar{u}_1| = 1 \wedge |\bar{u}_2| = 1$; por lo tanto

$$u_{11} = \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 = |\bar{u}_1|^2 = 1; \quad u_{22} = \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 = |\bar{u}_2|^2 = 1$$

En este caso la matriz fundamental se convierte en la matriz *unidad*

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$



Base ortogonal Base ortonormal Fig. 5.28

Ejercicio

Calcular la expresión del producto escalar en los casos de base ortogonal y ortonormal.

5.406. Generalización a dimensión tres

La misma definición de multiplicación escalar que se ha establecido para V_2 es válida para el espacio vectorial tridimensional ordinario V_3.

$$V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathfrak{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow \bar{x}\bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}| \cos (\hat{\bar{x}\bar{y}})$$

Tiene las mismas propiedades y su demostración es del todo similar.

Fijada una base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ de V_3 cada vector $\bar{x}$ viene determinado por sus tres coordenadas $(x_1\ x_2\ x_3)$, respecto de dicha base. La expresión analítica del producto escalar es análoga, con una coordenada más, a la que hemos visto en dimensión dos.

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3)(y_1\bar{u}_1 + y_2\bar{u}_2 + y_3\bar{u}_3) = (x_1\ x_2\ x_3)\, U \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

donde U es la matriz fundamental.

$$U = \begin{pmatrix} u_{11}u_{12}u_{13} \\ u_{21}u_{22}u_{23} \\ u_{31}u_{32}u_{33} \end{pmatrix} \qquad u_{ij} = \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \qquad i, j = 1, 2, 3$$

Una base $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$ se dice *ortogonal* si sus vectores son perpendiculares dos a dos; en este caso, la matriz fundamental es diagonal

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Una base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ se dice *ortonormal* si sus vectores son perpendiculares dos a dos y de módulo unidad; ahora la matriz fundamental es la matriz unitaria.

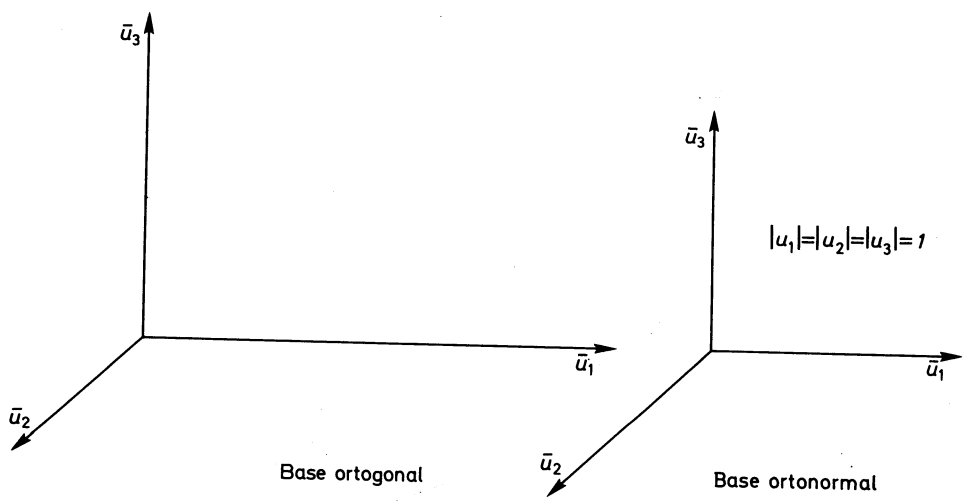


Fig. 5.29

Conviene introducir aquí el símbolo

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

conocido como «delta de Kronecker» y muy utilizado en Matemáticas. En este caso si la base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ es ortonormal resulta $u_{ij} = \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = \delta_{ij}$.

5.407. Multiplicación escalar en un espacio vectorial cualquiera

Hemos definido la multiplicación escalar en los espacios bi y tri dimensionales ordinarios. En ambos casos se verificaban las propiedades 1, 2, 3 y 4 del apartado 5.403. Estas propiedades, como se vio, eran demostrables haciendo uso de la definición de producto escalar.

Siguiendo el proceso normal de abstracción de la matemática vamos a considerar un espacio vectorial V cualquiera, es decir, de los que hemos llamado abstractos para distinguirlos del espacio vectorial y plano vectorial ordinarios (o «geométricos»); y definimos una aplicación de $V \times V$ en $\mathfrak{R}$.

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathfrak{R} \\ (x, y) &\longrightarrow xy \end{aligned}$$

tal que verifique

1. $xy = yx$
2. $(\lambda x)y = \lambda(xy)$
3. $x(y + z) = xy + xz$

para $\forall x, y, z \in V$, $\forall \lambda \in \mathfrak{R}$

4. $\begin{cases} xx > 0 & \text{para } x \neq 0 \\ 00 = 0 \end{cases}$

En estas condiciones, a la anterior aplicación la llamaremos *multiplicación escalar*.

Obsérvese que ahora las cuatro anteriores propiedades son *axiomas*. Estos cuatro axiomas han sido sugeridos por las propiedades correspondientes de la multiplicación escalar de los vectores libres del espacio vectorial ordinario.

En este caso el producto escalar no tiene ninguna relación con «el producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman», toda vez que los elementos del espacio vectorial que consideramos no son geométricos y no tiene sentido hablar de módulo o de «ángulo que forman».

NOTA. Adviértase que, si bien los axiomas se han elegido basándose en las cuatro propiedades indicadas del espacio vectorial ordinario, éstas son esenciales en la caracterización del mismo, y en modo alguno son fruto de una elección arbitraria.

Como ejercicio, compruébese que son multiplicaciones escalares las siguientes aplicaciones:

1. Sobre el espacio vectorial $\mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} &\longrightarrow \mathfrak{R} \\ (x, y) &\longrightarrow xy \end{aligned}$$

2. Sobre el espacio vectorial $\mathfrak{R}^n$

$$\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \longrightarrow \mathfrak{R}$$
$$[(x_1 \ldots x_n),\ (y_1 \ldots y_n)] \longrightarrow x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

3. Sobre el espacio vectorial $C[a, b]$

$$C[a, b] \times C[a, b] \longrightarrow \mathfrak{R}$$
$$(f, g) \longrightarrow \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

5.408. Espacio vectorial euclídeo

Se llama espacio vectorial euclídeo a un espacio vectorial (sobre el cuerpo $\mathfrak{R}$, se sobreentiende) dotado de un producto escalar.

En un espacio vectorial euclídeo podemos hablar de módulo de un vector, vectores ortogonales y ángulo de dos vectores, *definiéndolos a partir del producto escalar* por «analogía» con lo que ocurre en los espacios vectoriales ordinarios.

Así tendremos:

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}$$
$$x \text{ perpendicular a } y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$$
$$\cos(\hat{\vec{x}}\vec{y}) = \frac{xy}{|x||y|}$$

Estos conceptos de módulo, perpendicularidad y ángulo no tienen representación geométrica, puesto que no se trata de vectores geométricos, sino de entes matemáticos abstractos.

Plano vectorial euclídeo es un plano vectorial dotado de una multiplicación escalar.

Recta vectorial euclídea es una recta vectorial dotada de una multiplicación escalar.

5.409. Multiplicación vectorial en V_3

Consideremos la aplicación de $V_3 \times V_3$ en V_3

$$V_3 \times V_3 \overset{\wedge}{\longrightarrow} V_3$$
$$(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$$

en la que $\bar{x} \wedge \bar{y}$ es un vector de V_3, asociado unívocamente al par $(\bar{x}, \bar{y})$, definido de la forma siguiente:

Se toman representantes de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ con origen en un punto P fijo. $\overrightarrow{PA} \in \bar{x}$, $\overrightarrow{PB} \in \bar{y}$.

Se define $\bar{x} \wedge \bar{y} = \{\overrightarrow{PC}\}$, tal que $\overrightarrow{PC}$ viene determinado por su dirección, sentido y módulo según se ve a continuación.

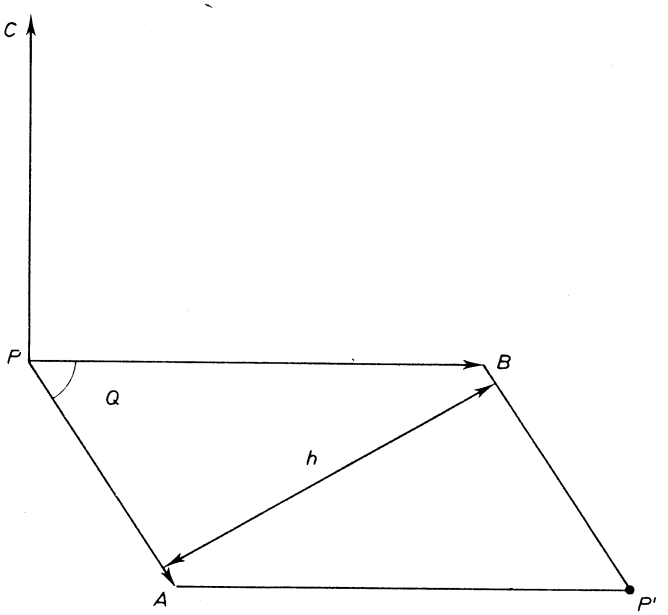


Fig. 5.30

1. *Dirección de* $\overrightarrow{PC}$: perpendicular al plano PAB.
2. *Sentido de* $\overrightarrow{PC}$: el de avance de un sacacorchos que girase en el sentido de llevar a coincidir $\overrightarrow{PA}$ con $\overrightarrow{PB}$, siguiendo el ángulo menor de 180°.
3. *Módulo de* $\overrightarrow{PC}$: Igual al producto de los módulos de $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ por el ángulo que forman, o sea

$$|\overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}| \operatorname{sen} \theta = \text{área del paralelogramo } PAP'BP.$$

El área del paralelogramo es base × altura $= |\overrightarrow{PA}| \cdot \mathrm{h}$, o sea

$$|\overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PA}| \cdot \mathrm{h} \qquad [1]$$

h = altura del paralelogramo, *es igual a la proyección de* $\overrightarrow{PB}$ *sobre un plano perpendicular a* $\overrightarrow{PA}$.

5.410. Propiedades de la multiplicación vectorial

1. $\bar{a} \wedge \bar{b} = -\bar{b} \wedge \bar{a}$.

Es evidente que el sentido cambia, pero la dirección y el módulo se conservan.

2. $\bar{a} \wedge (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \wedge \bar{b} + \bar{a} \wedge \bar{c}$.

En efecto, fijémonos en la figura 5.31. El plano dibujado es el perpendicular por el punto P al vector $\bar{a}$.

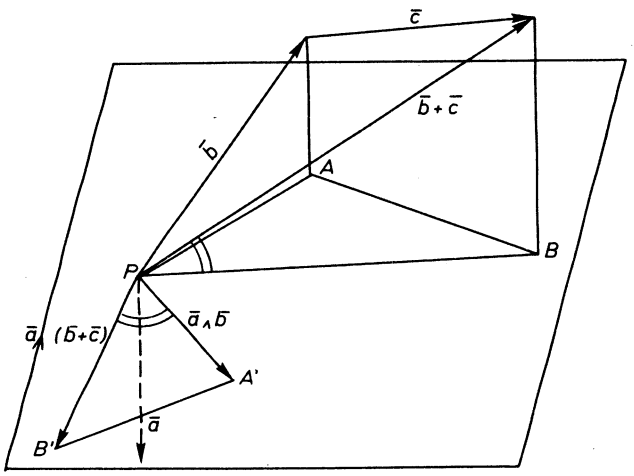


Fig. 5.31

$PA' = |\bar{a} \wedge \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot PA$
$PB' = |\bar{a} \wedge (\bar{b} + \bar{c})| = |\bar{a}| \cdot PB$ en virtud de [1] del apartado anterior.

Despejando $|\bar{a}|$ en ambos miembros e igualando

$$|\bar{a}| = \frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$$

Además,

$$\widehat{A'PB'} = \widehat{APB}$$

por tener los lados perpendiculares. Luego los triángulos $\widehat{APB}$ y $\widehat{A'PB'}$ son semejantes de razón módulo de $\bar{a}$, puesto que tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman.

$$A'B' = |\bar{a}|AB = |\bar{a} \wedge \bar{c}|$$

$\hat{A} = \hat{A}'$ y $PA' \perp PA \Rightarrow A'B' \perp AB$ *luego* $A'B'$ *es perpendicular a* $\bar{a}$ *y a* $\bar{c}$ por las siguientes razones:

1.ª Es perpendicular a $\bar{a}$ por estar contenido en un plano perpendicular a $\bar{a}$.

2.ª Es perpendicular a $\bar{c}$ por ser perpendicular al plano proyectante de $\bar{c}$.

$\{\overrightarrow{A'B'}\}$ *tiene el sentido* de avance del sacacorchos que gire en el sentido de llevar a coincidir $\bar{a}$ con $\bar{c}$ siguiendo el ángulo menor de 180°.

Resulta que $\{\overrightarrow{A'B'}\} = \bar{a} \wedge \bar{c}$ y por lo tanto

$$\{\overrightarrow{PB'}\} = \{\overrightarrow{PA'}\} + \{\overrightarrow{A'B'}\} \quad \text{o sea} \quad \bar{a} \wedge (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \wedge \bar{b} + \bar{a} \wedge \bar{c}, \quad \text{c.q.d.}$$

Análogamente,

$$(\bar{b} + \bar{c}) \wedge \bar{a} \overset{\text{(por 1.ª)}}{=} -\bar{a} \wedge (\bar{b} + \bar{c}) \overset{\text{(por 2.ª)}}{=} -\bar{a} \wedge \bar{b} - \bar{a} \wedge \bar{c} \overset{\text{(por 1.ª)}}{=} \\ = \bar{b} \wedge \bar{a} + \bar{c} \wedge \bar{a}$$

3. $\lambda(\bar{a} \wedge \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \wedge \bar{b} = \bar{a} \wedge (\lambda\bar{b})$.

Basta comprobar que tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Hágase como ejercicio.

5.411. Expresión analítica del producto vectorial

NOTA PRELIMINAR. Al elegir el sentido del producto vectorial de dos vectores como «el de avance de un sacacorchos que girase en el sentido de llevar a coincidir el primer factor con el segundo siguiendo el ángulo menor de 180°», se podía haber optado por el sentido contrario; la elección ha sido *arbitraria*.

Es conveniente que la elección, aunque sea arbitraria, esté ligada de alguna manera a la *base* de V_3. La base del espacio vectorial se supone ortonormal, que es la más cómoda para operar. Se conviene en que si la base es $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ *siempre se verifique* $\bar{u}_3 = \bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2$, de forma que el sentido que hemos usado al definir el producto vectorial equivale a que la posición relativa de los *vectores de la base es*

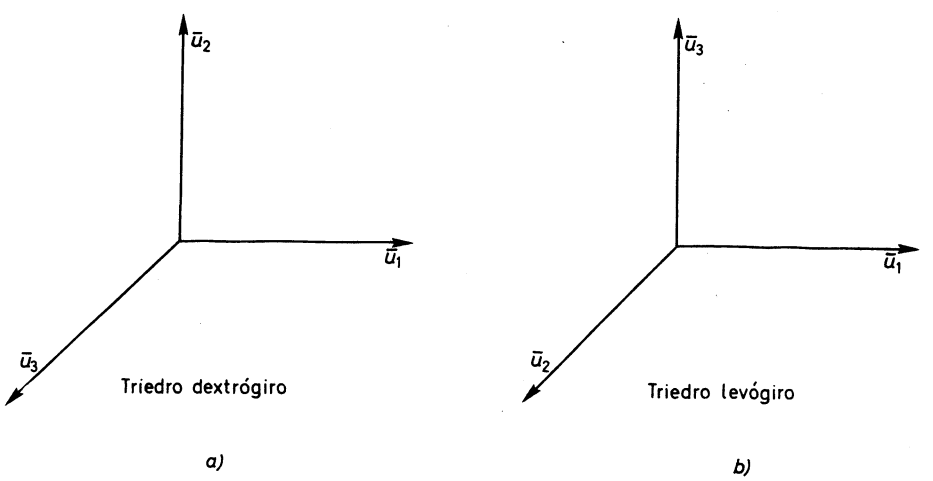


Fig. 5.32

El haber elegido el sentido contrario equivaldría a suponer la posición relativa de $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ como se muestra en la figura 5.32 *b*).

En cualquier caso es $\bar{u}_3 = \bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2$, luego

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_3 \quad ; \quad \bar{u}_2 = \bar{u}_3 \wedge \bar{u}_1$$

Además, como $\bar{a} \wedge \bar{a} = \bar{0}$, para todo $\bar{a}$, resulta

$$\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_1 = \bar{0} \quad ; \quad \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_2 = \bar{0} \quad ; \quad \bar{u}_3 \wedge \bar{u}_3 = 0$$

Calculemos la expresión analítica del producto vectorial $\bar{a} \wedge \bar{b}$, siendo

$$\bar{a} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3, \; \bar{b} = b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2 + b_3\bar{u}_3$$

$$\begin{aligned}
\bar{a} \wedge \bar{b} &= (a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3) \wedge (b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2 + b_3\bar{u}_3) \overset{\text{(pr. 2)}}{=} \\
&= (a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3) \wedge (b_1\bar{u}_1) + (a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3) \wedge (b_2\bar{u}_2) + \\
&+ (a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3) \wedge (b_3\bar{u}_3) \overset{\text{(pr. 2)}}{=} \\
&= (a_1\bar{u}_1) \wedge (b_1\bar{u}_1) + (a_2\bar{u}_2) \wedge (b_1\bar{u}_1) + (a_3\bar{u}_3) \wedge (b_1\bar{u}_1) + \\
&+ (a_1\bar{u}_1) \wedge (b_2\bar{u}_2) + (a_2\bar{u}_2) \wedge (b_2\bar{u}_2) + (a_3\bar{u}_3) \wedge (b_2\bar{u}_2) + \\
&+ (a_1\bar{u}_1) \wedge (b_3\bar{u}_3) + (a_2\bar{u}_2) \wedge (b_3\bar{u}_3) + (a_3\bar{u}_3) \wedge (b_3\bar{u}_3) \overset{\text{(pr. 3)}}{=} \\
&= a_1b_1(\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_1) + a_2b_1(\bar{u}_2 \wedge \bar{u}_1) + a_3b_1(\bar{u}_3 \wedge \bar{u}_1) + \\
&+ a_1b_2(\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2) + a_2b_2(\bar{u}_2 \wedge \bar{u}_2) + a_3b_2(\bar{u}_3 \wedge \bar{u}_2) + \\
&+ a_1b_3(\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_3) + a_2b_3(\bar{u}_2 \wedge \bar{u}_3) + a_3b_3(\bar{u}_3 \wedge \bar{u}_3) = \\
&= a_2b_1(-\bar{u}_3) + a_3b_1\bar{u}_2 + a_1b_2\bar{u}_3 + a_3b_2(-\bar{u}_1) + \\
&+ a_1b_3(-\bar{u}_2) + a_2b_3\bar{u}_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bar{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \bar{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{u}_3
\end{aligned}$$

Como regla nemotécnica puede escribirse en forma de determinante

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

5.412. Triple producto escalar. Interpretación geométrica. Expresión analítica

Se da el nombre de *triple producto escalar* o producto mixto, al producto escalar de dos vectores, tal que uno de ellos es producto vectorial de otros dos, o sea $\bar{a} \cdot (\bar{b} \wedge \bar{c})$

$$|\bar{b} \wedge \bar{c}| = |\bar{b}||\bar{c}| \operatorname{sen} (\widehat{\bar{b}\bar{c}}) = \text{área del paralelogramo } OBDCO.$$

$\bar{a} \cdot (\bar{b} \wedge \bar{c}) = |\bar{a}||\bar{b} \wedge \bar{c}| \cos (\widehat{\bar{a}, \bar{b} \wedge \bar{c}}) = |\bar{b} \wedge \bar{c}| \cdot OH = (\text{área } OBDCO) \times OH =$
$=$ volumen del paralelepípedo.

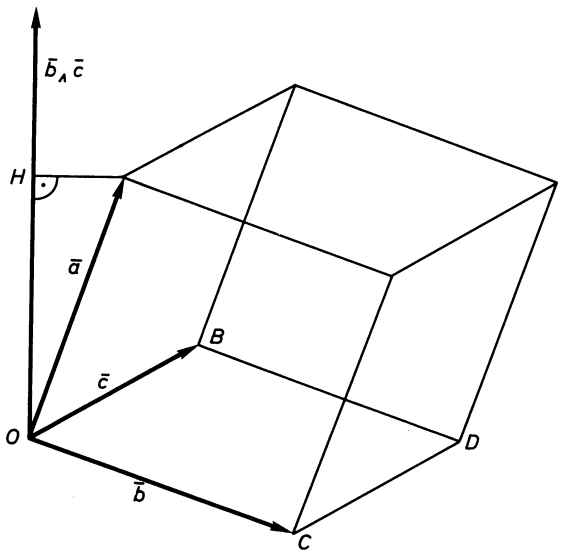


Fig. 5.33

$$\begin{matrix}\bar{a} = (a_1\ a_2\ a_3)\\ \bar{b} = (b_1\ b_2\ b_3)\\ \bar{c} = (c_1\ c_2\ c_3)\end{matrix} \qquad \bar{b} \wedge \bar{c} = \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right)$$

luego

$$\bar{a}(\bar{b} \wedge \bar{c}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

El triple producto escalar se suele escribir

$$\bar{a}(\bar{b} \wedge \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$$

Como en un determinante de tercer orden se pueden permutar cíclicamente las filas, se verifica

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$$

Sin embargo, si se cambian dos filas entre sí, cambia de signo:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}), \text{ etc.}$$

5.413. Función vectorial

En el espacio vectorial de dimensión tres, V_3, supuesta una base

$$B = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3),$$

cada vector $\bar{a} \in V_3$ viene determinado por sus componentes $(a_1\ a_2\ a_3)$.

$$\bar{a} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3$$

Si cada componente es una función de la variable t, resulta que el vector $\bar{a}$ es una función de la variable t

$$\bar{a}(t) = a_1(t)\bar{u}_1 + a_2(t)\bar{u}_2 + a_3(t)\bar{u}_3$$

o lo que es igual,

$$\bar{a}(t) = (a_1(t),\ a_2(t),\ a_3(t))$$

$\bar{a}(t)$ se dice que es una *función vectorial* de la variable real t, es decir $\bar{a}(t)$ es el conjunto de las tres funciones reales de la variable real t,

$$(a_1(t),\ a_2(t),\ a_3(t)).$$

5.414. Derivada de una función vectorial

Para el valor t de la variable resulta

$$\bar{a}(t) = a_1(t)\bar{u}_1 + a_2(t)\bar{u}_2 + a_3(t)\bar{u}_3$$

Para el valor $t + \Delta t$

$$\bar{a}(t + \Delta t) = a_1(t + \Delta t)\bar{u}_1 + a_2(t + \Delta t)\bar{u}_2 + a_3(t + \Delta t)\bar{u}_3$$

Restando ambas expresiones queda

$$\Delta\bar{a} = \bar{a}(t + \Delta t) - \bar{a}(t) =$$
$$= (a_1(t + \Delta t) - a_1(t))\bar{u}_1 + (a_2(t + \Delta t) - a_2(t))\bar{u}_2 + (a_3(t + \Delta t) - a_3(t))\bar{u}_3$$

Multiplicando ambos miembros por el número real $\dfrac{1}{\Delta t}$, resulta

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{a_1(t + \Delta t) - a_1(t)}{\Delta t}\bar{u}_1 + \frac{a_2(t + \Delta t) - a_2(t)}{\Delta t}\bar{u}_2 + \frac{a_3(t + \Delta t) - a_3(t)}{\Delta t}\bar{u}_3$$

Tomando límites para $\Delta t \to 0$,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a_1(t + \Delta t) - a_1(t)}{\Delta t}\right)\bar{u}_1 + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a_2(t + \Delta t) - a_2(t)}{\Delta t}\right)\bar{u}_2 +$$
$$+ \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a_3(t + \Delta t) - a_3(t)}{\Delta t}\right)\bar{u}_3 = a_1'(t)\bar{u}_1 + a_2'(t)\bar{u}_2 + a_3'(t)\bar{u}_3$$

El vector $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t}$ existe, si existen $(a_1'(t),\ a_2'(t),\ a_3'(t))$; es decir, si las funciones $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ son derivables. Este vector se llama la *derivada de la función vectorial* $\bar{a}(t)$ y se representa

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t} = \frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d}{dt}\,\bar{a} = (a_1'(t),\ a_2'(t),\ a_3'(t))$$

Basándonos en la definición anterior procedemos a calcular la derivada de $f(t) \cdot \bar{a}(t) = (f(t)a_1(t),\ f(t)a_2(t),\ f(t)a_3(t))$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f(t)a(t)) &= \left(\frac{d}{dt}(f(t)a_1(t)),\ \frac{d}{dt}(f(t)a_2(t)),\ \frac{d}{dt}(f(t)a_3(t))\right) = \\
&= (f'(t)a_1(t) + f(t)a_1'(t),\ f'(t)a_2(t) + f(t)a_2'(t),\ f'(t)a_3(t) + a_3'(t)f(t)) = \\
&= (f'(t)a_1(t),\ f'(t)a_2(t),\ f'(t)a_3(t)) + (f(t)a_1'(t),\ f(t)a_2'(t),\ f(t)a_3'(t)) = \\
&= f'(t) \cdot \bar{a}(t) + f(t) \cdot \bar{a}'(t)
\end{aligned}$$

Luego subsiste la regla de derivación del producto de dos funciones.

Se comprueba análogamente que esta ley también es válida para el producto escalar y el producto vectorial. Es decir,

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}(t) \cdot \bar{b}(t)) = \bar{a}(t) \cdot \bar{b}'(t) + \bar{a}'(t) \cdot \bar{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}(t) \wedge \bar{b}(t)) = \bar{a}(t) \wedge \bar{b}'(t) + \bar{a}'(t) \wedge \bar{b}(t)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\bar{a}(t) \cdot \bar{b}(t)) &= \frac{d}{dt}(a_1(t)b_1(t) + a_2(t)b_2(t) + a_3(t)b_3(t)) = \\
&= a_1'(t)b_1(t) + a_1(t)b_1'(t) + a_2'(t)b_2(t) + a_2(t)b_2'(t) + a_3'(t)b_3(t) + \\
&\quad + a_3(t)b_3'(t) = \bar{a}'(t) \cdot \bar{b}(t) + \bar{a}(t) \cdot \bar{b}'(t)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(a(t) \wedge b(t)) = \frac{d}{dt}\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2' & a_3' \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2' & b_3' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3' & a_1' \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3' & b_1' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2' & a_3' \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3' & a_1' \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2' & b_3' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3' & b_1' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \bar{a}'(t) \wedge \bar{b}(t) + \bar{a}(t) \wedge \bar{b}'(t)$$

Como ejercicio instructivo de cálculo vectorial se aconseja estudiar con todo detalle la deducción de las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.

5.415. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

5.4150.
Averígüese si $\bar{x} = (0, 1, 2)$ $\bar{y} = (2, -3, 1)$ $\bar{z} = (3, -4, 5)$ son paralelas a un mismo plano. (Hágase uso del triple producto escalar.)

5.4151.
Demuéstrese, haciendo uso de las propiedades del producto escalar, que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

5.4152.
Cálculese $\bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z})$, para $\bar{x} = (1, 1, 2)$, $\bar{y} = (0, 0, 3)$, $\bar{z} = (0, -1, 2)$.

5.4153.
Calcúlese $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \cdot (\bar{z} \wedge \bar{t})$, para $\bar{x} = (-1, 0, 1)$, $\bar{y} = (2, -1, 0)$, $\bar{z} = (0, 0, -2)$, $\bar{t} = (1, 1, 2)$.

5.4154.
Calcúlese $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{z} \wedge \bar{t})$, para los mismos vectores del ejercicio anterior.

5.4155.
Dados los vectores $\bar{x} = (1, 2, 3)$, $\bar{y} = (0, -1, 1)$, $\bar{z} = (1, 1, \lambda)$, determínese el valor de λ con la condición de que sean paralelos a un mismo plano.

5.4156.
Dados tres vectores $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, de módulo unidad, demuéstrese que el volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores (valor llamado por Staudt «seno del ángulo triedro») vale

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\gamma \\ \cos\lambda & 1 & \cos\mu \\ \cos\gamma & \cos\mu & 1 \end{vmatrix}$$

5.4157.
Demuéstrese que las tres medianas de un triángulo A, B y C concurren en un punto.

NOTA. Debe partirse de que el punto es $\dfrac{\{\overrightarrow{OA}\} + \{\overrightarrow{OB}\} + \{\overrightarrow{OC}\}}{3}$.

5.4158.
Demuéstrese que cualquiera que sean los vectores $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, se verifica:

$$\bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z}) + \bar{y} \wedge (\bar{z} \wedge \bar{x}) + \bar{z} \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 0$$

5.4159.
Demuéstrese que $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$. Consecuencia:

$$|\bar{x}| - |\bar{y}| \leq |\bar{x} - \bar{y}|$$

6

GEOMETRIA

BIBLIOGRAFIA 6

P. ABELLANAS: *Introducción a la matemática*. Ed. Saeta. Madrid.
I. M. YAGLOM: *Geometric transformations*. New Mathematical Library. Random House.
SANTALÓ: *Geometría proyectiva* (370 págs.). EUDEBA. Buenos Aires, 1966.
GANS: *Transformations and Geometries*. Ed. Appleton. Nueva York.

6.1

El plano afín
Ecuación de la recta
Incidencia, intersección y paralelismo

6.11. Introducción

6.12. Plano afín

6.13. Biyección entre los puntos de Π_0 y los vectores libres

6.14. Referencia de coordenadas en el plano afín

6.15. Recta del plano afín

6.16. Posiciones relativas de puntos y rectas

6.17. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

6.1

El plano afín. Ecuación de la recta. Incidencia, intersección y paralelismo

6.11. INTRODUCCION

En la geometría elemental clásica aparecen los conceptos de punto, recta y plano como ideas primarias, es decir, ideas que no se definen.

El concepto de punto, por ejemplo, viene sugerido por el extremo de un alfiler; el concepto de recta por un hilo tirante; el de plano por la superficie del agua de un estanque cuando no hace viento.

La Geometría se constituye estableciendo axiomas que se refieran a relaciones entre los elementos y que están también sugeridos por imágenes del mundo sensible. Así, por ejemplo, una puerta queda fija por tres puntos no alineados como pueden ser dos bisagras y la cerradura; decimos entonces que un plano está determinado por tres puntos no alineados.

Es decir, la Geometría clásica, que es la Geometría euclídea, tiene una gran carga de intuición. En los tiempos modernos hay una tendencia a construir estructuras puramente formales que no dicen nada de la realidad sensible.

En los primeros capítulos del Análisis hemos construido los números reales por el método axiomático. Basándonos en conceptos intuitivos de la Geometría vimos que existía una biyección entre los números reales y los puntos de la recta. Esto nos permitió luego definir la estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Es decir, definimos: *a*) vector libre; *b*) adición de vectores libres; *c*) multiplicación de números reales por vectores libres.

Efectuando abstracción de las propiedades de *b*) y *c*) llegábamos a una estructura puramente formal que ya nada decía con relación a los vectores que sirvieron de punto de partida.

Esta estructura se sigue llamando Espacio Vectorial, pero se trata de un espacio vectorial abstracto, no del espacio vectorial formado por los vectores geométricos.

Las propiedades de las operaciones *b*) y *c*) se demostraban en el caso de vectores geométricos, pero en el caso del espacio vectorial abstracto se toman como punto de partida, es decir, como axiomas.

De manera análoga vamos a proceder al construir espacios afines y euclídeos. Es decir, vamos a partir de los espacios afín y euclídeo de la geometría intuitiva, y luego efectuaremos una abstracción, estableciendo como axiomas ciertas propiedades de los espacios afín y euclídeo elementales.

Así se llegará al concepto de espacio afín abstracto y espacio euclídeo abstracto.

6.12. PLANO AFIN

Considérese el plano vectorial V_2 de los vectores libres del plano Π.

Sea una aplicación f: $\Pi \times \Pi \to V_2$ tal que a cada elemento de $\Pi \times \Pi$, o sea, a cada par ordenado (A, B) de puntos de Π le hace corresponder el vector libre representado por el vector de extremos (A, B).

Es decir,

$$\Pi \times \Pi \xrightarrow{f} V_2$$

$$(A, B) \longrightarrow f(A, B) = \{\overrightarrow{AB}\}$$

Esta aplicación tiene las siguientes propiedades:

1. $f(AB) = -f(BA)$.

   Es inmediato, pues esta igualdad equivale a $\{\overrightarrow{AB}\} = -\{\overrightarrow{BA}\}$.

2. $f(AB) + f(BC) = f(AC)$.

   Esta igualdad equivale a $\{\overrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{BC}\} = \{\overrightarrow{AC}\}$, que evidentemente se verifica por las propiedades de la adición.

3. Dado un punto A y un vector libre $\bar{x}$, existe un punto único P tal que

   $$f(AP) = \bar{x}, \text{ o sea, } \overrightarrow{AP} \in \bar{x}$$

Esto es consecuencia de que hay un representante de cada vector libre con origen en cada punto.

El plano Π, o lo que es igual, el plano de la «Geometría elemental» se llama *plano afín*. Hemos encontrado una aplicación f de $\Pi \times \Pi$ en V_2 (espacio vectorial abstracto), que verifica las propiedades 1, 2 y 3; entonces se define el plano afín abstracto como «*el conjunto C ligado mediante f a* V_2».

Las propiedades 1, 2 y 3 ahora son axiomas. De esta forma hemos creado una nueva estructura matemática que llamamos plano afín y que está inspirada en el plano de la geometría intuitiva elemental, pero que, insistimos, es una estructura abstracta, es decir, puramente algebraica.

En el plano afín se verifica $f(AA) = -f(AA)$ por 1. Luego $f(AA) = 0$.

6.13. BIYECCION ENTRE LOS PUNTOS DE Π_0 Y LOS VECTORES LIBRES

Sea Π_0 un plano Π en el que hemos fijado un punto 0 que llamaremos origen. La aplicación

$$\Pi_0 \longrightarrow V_2$$
$$A \longrightarrow f(A) = \{\overrightarrow{OA}\}$$

establece una biyección entre los puntos del plano Π_0 y los vectores libres de V_2.

En efecto: a cada punto A corresponde un único vector libre $\{\overrightarrow{OA}\}$.

En la figura 6.1, *a*) se observa que a A corresponde $\{\overrightarrow{OA}\}$
a B corresponde $\{\overrightarrow{OB}\}$
a C corresponde $\{\overrightarrow{OC}\}$

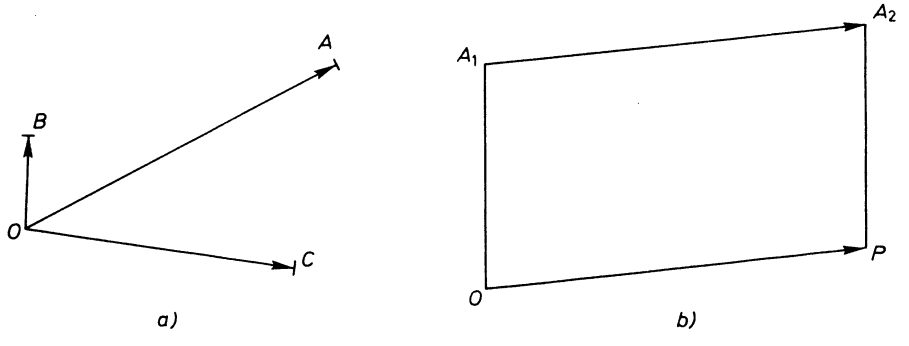


Fig. 6.1

Y, recíprocamente, a cada vector libre $\bar{x}$ le corresponde un representante único de origen 0.

Si $\bar{x} = \{\overrightarrow{A_1A_2}\}$, P queda determinado de manera única con la condición

$$\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{A_1A_2} \text{ (Fig. 6.1, } b\text{))}$$

Esta biyección se verifica también en el plano afín abstracto. Se demuestra haciendo uso del axioma 3: Dado el vector x, el punto P tal que $f(OP) = x$ es único por el axioma 3.

Dado el punto P, le corresponde un único $\bar{x} = f(OP)$; luego existe la biyección, c.q.d.

6.14. REFERENCIA DE COORDENADAS EN EL PLANO AFIN

Si en el plano vectorial V_2 se fija una base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, ya se vio que cada vector $\bar{x} \in V_2$ puede expresarse de manera única en la forma $\bar{x} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2$, donde (a_1, a_2) son números reales que llamamos coordenadas del vector x respecto de la base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$.

Hemos visto en el apartado anterior que en el plano con un origen fijo Π_0, a cada punto A le corresponde biunívocamente un vector libre $\{\overrightarrow{OA}\}$ que está determinado por sus coordenadas (a_1a_2) respecto de la base $(\bar{u}_2\bar{u}_2)$.

$$\Pi \xrightarrow{0} V_2 \xrightarrow{(\bar{u}_1\,\bar{u}_2)} \mathfrak{R}^2$$

$$A \longrightarrow \{\overrightarrow{OA}\} \longrightarrow (a_1, a_2)/\{\overrightarrow{OA}\} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2$$

El punto 0 y la base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ forman lo que se denomina una *referencia de coordenadas* del plano Π, que representamos $R = \{0; \bar{u}_1\bar{u}_2\}$

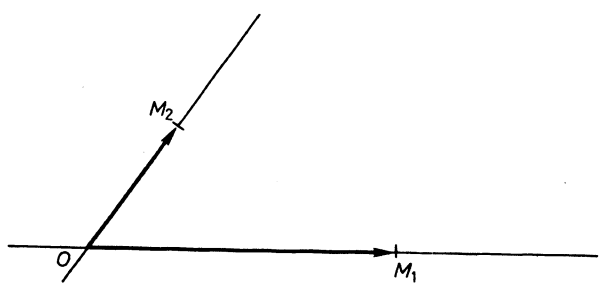
La referencia R permite establecer la biyección

$$\Pi \xrightarrow{\{R = 0;\, \bar{u}_1\,\bar{u}_2\}} \mathfrak{R}^2$$

$$A \longrightarrow (a_1a_2)/\{\overrightarrow{OA}\} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2$$

entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales.
(a_1, a_2) *son las coordenadas de A respecto de R.*

La referencia R puede «visualizarse» (Fig. 6.2).



$\overrightarrow{OM}_1 \in \bar{u}_1$

$\overrightarrow{OM}_2 \in \bar{u}_2$

Fig. 6.2

El sistema de coordenadas que se utiliza normalmente es aquel en que $|\overrightarrow{OM}_1| = |\overrightarrow{OM}_2| = 1$ y además las rectas de posición de $\overrightarrow{OM}_1$ y $\overrightarrow{OM}_2$ son perpendiculares (son los ejes x e y).

La base es *ortonormal.*

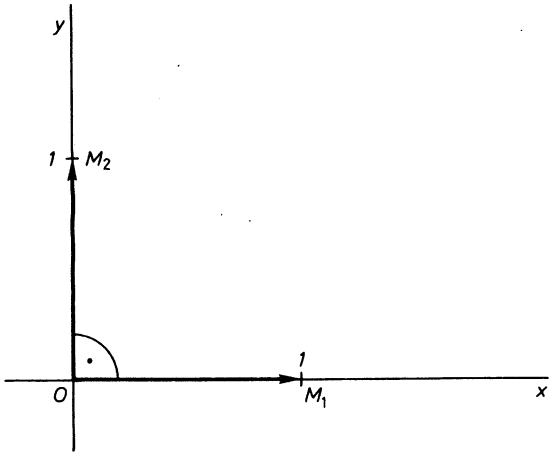


Fig. 6.3

6.15. RECTA DEL PLANO AFIN

Supongamos el plano con una referencia $R = \{0; \bar{u}_1 \bar{u}_2\}$
Una recta está determinada por dos puntos (A, B).
Si X es un punto cualquiera de la recta, se verifica

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \{\overrightarrow{AX}\}$$

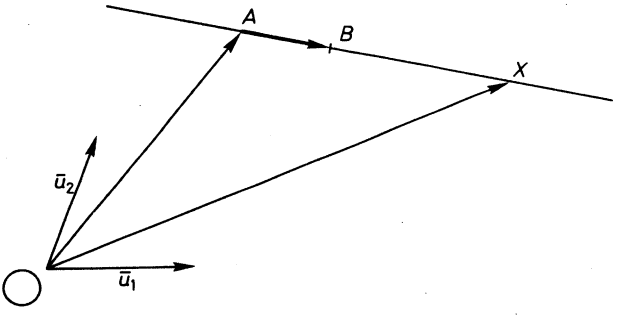


Fig. 6.4

Pero $\overrightarrow{AX} = \lambda . \overrightarrow{AB}$, siendo λ un determinado número real para cada punto X, luego

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \{\lambda \cdot \overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda \{\overrightarrow{AB}\};$$

pero como

$$\{\overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\},$$

resultará

$$\boxed{\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\,[\{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\}]} \quad \text{ecuación vectorial}$$

Supongamos que las coordenadas respecto de R de X sean (x_1x_2); las de A sean (a_1a_2) y las de B sean (b_1b_2). Entonces,

$$\underbrace{x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2}_{\{\overrightarrow{OX}\}} = \underbrace{a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2}_{\{\overrightarrow{OA}\}} + \lambda\,[\underbrace{b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2}_{\{\overrightarrow{OB}\}} - \underbrace{(a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2)}_{\{\overrightarrow{OA}\}}] =$$

$$= (a_1 + \lambda\,(b_1 - a_1))\,\bar{u}_1 + (a_2 + \lambda\,(b_2 - a_2))\,\bar{u}_2.$$

O sea, puesto que las coordenadas son únicas,

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda\,(b_1 - a_1) \\ x_2 &= a_2 + \lambda\,(b_2 - a_2) \end{aligned}} \quad \textit{ecuaciones paramétricas} \text{ de la recta}$$

A cada valor dado al parámetro λ corresponde un punto $X = (x_1x_2)$ de la recta. Si se elimina λ de las ecuaciones anteriores se obtiene la

$$\textit{ecuación cartesiana} \qquad \boxed{\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}}$$

Esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\boxed{\alpha\,x_1 + \beta\,x_2 + \gamma = 0}$$

Ejemplo

Sea $A = (3, -1)$; $B = (0, 6)$ dos puntos. Vamos a determinar la ecuación de la recta AB.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 3 + \lambda\,(0 - 3) \\ x_2 &= -1 + \lambda\,(6 + 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= 3 - 3\lambda \\ x_2 &= -1 + 7\lambda \end{aligned}} \quad \text{ecuaciones paramétricas}$$

$$\left.\frac{x_1 - 3}{0 - 3} = \frac{x_2 + 1}{6 + 1}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x_1 - 3}{-3} = \frac{x_2 + 1}{7}} \quad \text{ecuación cartesiana}$$

Esta última puede escribirse en la forma $7(x_1 - 3) + 3(x_2 + 1) = 0$

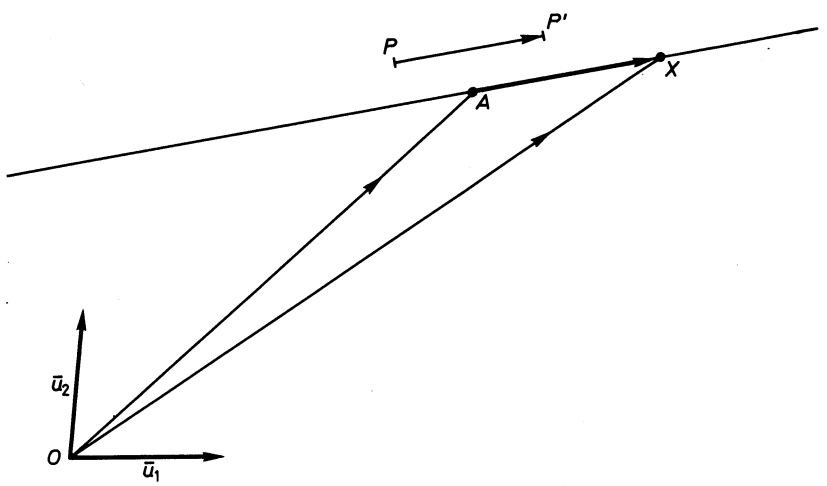
o sea $\boxed{7x_1 + 3x_2 - 18 = 0}$

Hemos hallado la ecuación de la recta cuando viene determinada por dos puntos, pero también puede venir definida por un punto y una dirección.

Puede pedirse la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (a_1\ a_2)$ y tiene la dirección del vector $\bar{p} = (p_1\ p_2)$.

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\,\bar{p};$$

o sea



$\overrightarrow{pp'} \in \bar{p}$

$\{\overrightarrow{AX}\} = \lambda\,\bar{p}$

Fig. 6.5

$$\left.\begin{matrix} x_1 = a_1 + \lambda p_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda p_2 \end{matrix}\right\} \textit{ ecuaciones paramétricas}$$

$$\frac{x_1 - a_1}{p_1} = \frac{x_2 - a_2}{p_2} \textit{ ecuación cartesiana}$$

Ejemplo

Recta que pasa por $A = (5, 2)$ y de dirección $\bar{p} = (1, 3)$.

$$\boxed{\begin{matrix} x_1 = 5 + \lambda \cdot 1 \\ x_2 = 2 + \lambda \cdot 3 \end{matrix}} \text{ o bien } \boxed{\frac{x_1 - 5}{1} = \frac{x_2 - 2}{3}}$$

6.16. POSICIONES RELATIVAS DE PUNTOS Y RECTAS

A) Para que un punto pertenezca a una recta es condición necesaria y suficiente que las coordenadas del punto verifiquen la ecuación de la recta.

B) La condición necesaria y suficiente para que dos rectas tengan puntos comunes es que sea compatible el sistema formado por las dos ecuaciones. Sean las rectas

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 &= \gamma_1 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 &= \gamma_2 \end{aligned}$$

Para que el sistema sea compatible ha de verificarse:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = r$$

Pueden ocurrir dos casos:

1.º) $r = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ y, por tanto, ambas rectas *coinciden*.

2.º) $r = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$, y por tanto, se cortan en un único punto cuyas coordenadas se obtienen resolviendo el sistema por la regla de Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}$$

C) La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas pero no coincidentes es: que sea incompatible el sistema formado por las dos ecuaciones.

Sean $\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 = \gamma_1 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_1 = \gamma_2 \end{cases}$

Para que sea incompatible el sistema ha de ser

$$r \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \neq r \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}. \text{ Como } r \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \leq r \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \leq 2$$

al ser distintos los rangos ha de ser $r \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = 1$ y $r \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 2$

luego

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

D) Haz de rectas concurrentes.

Considérense dos rectas que se cortan en un punto P.

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 - \gamma_1 = 0 \\ r_2 &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 - \gamma_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

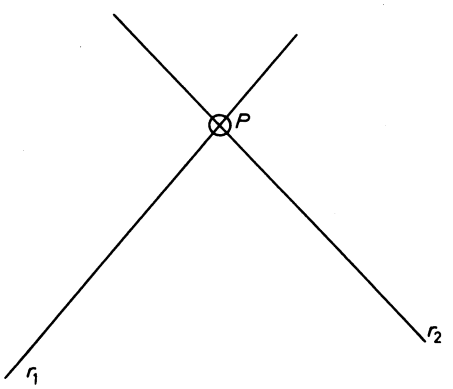


Fig. 6.6

La ecuación general de las rectas que pasan por el punto de intersección es $r \equiv r_1 + \lambda r_2 = 0$; o sea, $r \equiv (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 - \gamma_1) + \lambda(\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 - \gamma_2) = 0$.
En efecto:

1) es la ecuación de una recta por ser lineal en x_1, x_2;
2) se verifica para las coordenadas del punto de intersección, pues queda $0 + \lambda \cdot 0 = 0$, para todo λ, ya que $P \in r_1$ y $P \in r_2$.

E) Haz de rectas paralelas.

Sea la recta $r_1 \equiv \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 = 0$.
El haz de rectas paralelas es $r \equiv r_1 + \lambda = 0$; o lo que sigue:

$$r \equiv \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 + \lambda = 0$$

Es claro que para cualquier valor de λ es $r // r_1$, pues $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1} = \dfrac{\beta_1}{\beta_1} \neq \dfrac{\gamma_1}{\gamma_1 + \lambda}$.

Ejercicios

1. Ecuación general de las rectas que pasan por el punto de intersección de $2x_1 - 3x_2 - 6 = 0$ y $4x_1 - x_2 - 5 = 0$.
2. Ecuación general de las rectas paralelas a la recta $7x_1 + 3x_2 - 2 = 0$.
3. Determinar la recta del ejercicio 1 que pasa por el punto (3, 0), y la recta del ejercicio 2 que pasa por el punto (1, 1).
4. Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 4 &= 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 9 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - 5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 7 = 0 \\ 12x_1 + 10x_2 - 14 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

F) La condición necesaria y suficiente para que las rectas

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 = 0 \\ \alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases},$$

pertenezcan al mismo haz, es decir, para que sean concurrentes es

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

En efecto, si se cortan en el punto (a, b), el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w &= 0 \\ \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w &= 0 \\ \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w &= 0 \end{aligned}$$

admite la solución $(a, b, 1)$, es decir, que es compatible, luego

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Recíprocamente, si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

una fila del determinante es combinación lineal de las otras dos. Supongamos por ejemplo, que es la fila 3.ª; entonces

$$\alpha_3 = \lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2; \beta_3 = \lambda \beta_1 + \mu \beta_2; \gamma_3 = \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2;$$

o sea,

$$\alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 = \lambda (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1) + \mu (\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2) = 0$$

y se observa que pertenece al haz formado por las dos primeras.

6.17. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

6.170.

Ecuación de la recta que pasa por $A = (1, 2)$ y $B = (3, -1)$ en forma paramétrica y cartesiana.

6.171.
Ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta que pasa por $A = (1, -5)$ y de dirección $\bar{p} = (-3, 2)$.

6.172.
Ecuación vectorial de la recta del ejercicio 6.170.

6.173.
Estúdiese la posición relativa de los pares de rectas siguientes

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3 \\ 2x_1 + 8x_2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

6.174.
Ecuación de la recta que pasa por $(-3, 0)$ y por el punto de intersección de

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

6.175.
Ecuación general del haz de rectas de vértice el punto $V = (1, 1)$.

6.176.
Ecuación de la recta que pasa por $(5, -1)$ y es paralela a la recta $x_1 - 3x_2 = 5$.

6.177.
Estúdiese la posición relativa de las rectas

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 11x_2 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

6.178.
Determínese el parámetro λ con la condición de que las tres rectas siguientes sean concurrentes

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ 4x_1 + \lambda x_2 = 7 \end{cases}$$

6.179.
Determínese el parámetro λ con la condición de que las dos rectas siguientes sean paralelas

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 6x_1 + (1 - \lambda)x_2 = 7 \end{cases}$$

6.2

Plano euclídeo. Problemas métricos

6.21. Plano euclídeo

6.22. Coordenadas contravariantes y covariantes

6.23. Diversas expresiones analíticas del producto escalar

6.24. Interpretación de los coeficientes de la ecuación de la recta

6.25. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

6.26. Espacio métrico

6.27. Estructura métrica ligada al plano euclídeo

6.28. Problemas métricos en el plano

6.29. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

6.2

Plano euclídeo. Problemas métricos

6.21. PLANO EUCLIDEO

Recordemos que el plano *afín ordinario* Π está ligado con el plano vectorial V_2 de los vectores libres del plano Π, mediante la aplicación

$$\Pi \times \Pi \xrightarrow{f} V_2$$
$$(A, B) \longrightarrow f(A, B) = \{\overrightarrow{AB}\}$$

que verifica: 1) $f(A, B) = -f(B, A)$.
2) $f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$.
3) Dado un punto A y un vector libre $\bar{x}$, existe un punto único P, tal que $\overrightarrow{AP} \in \bar{x}$.

Se ha visto que el plano afín abstracto es un conjunto C y una aplicación f de $C \times C$ en un plano vectorial (el cual no tiene por qué ser el plano vectorial ordinario), que verifica las propiedades anteriores 1, 2 y 3.

El plano vectorial ordinario de los vectores libres de Π está dotado de un producto escalar (el ordinario); por lo tanto, es un espacio vectorial euclídeo.

El plano afín ordinario Π se llama *plano euclídeo* porque su plano vectorial correspondiente, V_2, es un plano vectorial euclídeo.

En general, un *plano euclídeo es un plano afín sobre un plano vectorial euclídeo.*

Recordemos que un plano vectorial euclídeo es un plano vectorial dotado de un producto escalar.

6.22. COORDENADAS CONTRAVARIANTES Y COVARIANTES

Sea el espacio vectorial V_2, dotado del producto escalar ordinario, y $B = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, una base cuya matriz fundamental es

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \qquad u_{ij} = \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \qquad \text{para } i, j = 1, 2$$

Un vector $\bar{x}$ cualquiera tendrá unas coordenadas respecto de B que representaremos con supraíndices (x^1, x^2), o sea $\bar{x} = x^1\bar{u}_1 + x^2\bar{u}_2$.

Estas coordenadas son las coordenadas ordinarias o simplemente coordenadas que venimos considerando y que, a partir de ahora, llamaremos *contravariantes*.

Multiplicando escalarmente por $\bar{u}_1$ los dos miembros de la igualdad

$$\bar{x} = x^1\bar{u}_1 + x^2\bar{u}_2$$

resulta

$$\bar{x} \cdot \bar{u}_1 = x^1\bar{u}_1\bar{u}_1 + x^2\bar{u}_2\bar{u}_1 = x^1u_{11} + x^2u_{21}$$

Al producto $x \cdot \bar{u}_1$ le representaremos por x_1, que es la proyección ortogonal de $\bar{x}$ sobre la recta que contiene a $\bar{u}_1$ si $|\bar{u}_1| = 1$

$$x_1 = \bar{x} \cdot \bar{u}_1 = x^1u_{11} + x^2u_{21}$$

Análogamente, multiplicamos escalarmente por $\bar{u}_2$ los dos miembros de la igualdad

$$\bar{x} = x^1\bar{u}_1 + x^2\bar{u}_2$$

y resultará

$$\bar{x} \cdot \bar{u}_2 = x^1\bar{u}_1\bar{u}_2 + x^2\bar{u}_2\bar{u}_2 = x^1u_{12} + x^2u_{22}$$

Al producto $\bar{x} \cdot \bar{u}_2$ le denotaremos por x_2 y representa la proyección ortogonal de $\bar{x}$ sobre la recta que contiene a $\bar{u}_2$ en el caso de que $|\bar{u}_2| = 1$.

Se llaman *coordenadas covariantes* del vector $\bar{x}$ respecto de la base B al par $(x_1\ x_2)$.

Según hemos definido x_1 y x_2, resulta:

$$(x_1\ x_2) = (x^1\ x^2)\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = (x^1\ x^2)\,U$$

Veamos que la matriz fundamental es una matriz regular. En efecto:

$$u_{11} = |\bar{u}_1|^2 \qquad u_{22} = |\bar{u}_2|^2 \qquad u_{12} = |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2| \cos(\widehat{\bar{u}_1, \bar{u}_2})$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} |\bar{u}_1|^2 & |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2| \cos(\widehat{\bar{u}_1, \bar{u}_2}) \\ |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2| \cos(\widehat{\bar{u}_1, \bar{u}_2}) & |\bar{u}_2|^2 \end{vmatrix} =$$

$$= |\bar{u}_1|^2\,|\bar{u}_2|^2\,(1 - \cos^2(\widehat{\bar{u}_1, \bar{u}_2}) = |\bar{u}_1|^2\,|\bar{u}_2|^2 \operatorname{sen}^2(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

El determinante U es igual al cuadrado del área del paralelogramo construido sobre los dos vectores y, por lo tanto, es *distinto de cero*, pues para que fuese cero, $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ habrían de estar situados sobre la misma recta, lo cual es imposible, ya que son linealmente independientes por formar base.

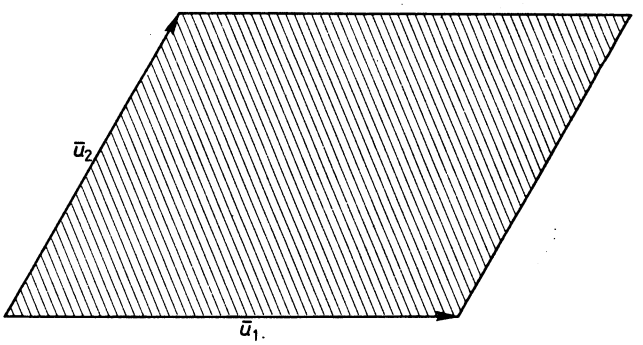


Fig. 6.7

Como la matriz fundamental U es regular, existe la matriz inversa U^{-1}, y se puede escribir

$$(x^1\ x^2) = (x_1\ x_2)\ U^{-1}$$

O sea, las fórmulas de paso de coordenadas contravariantes a covariantes y viceversa, son

$$\boxed{\begin{aligned}(x_1, x_2) &= (x^1, x^2)\ U \\ (x^1, x^2) &= (x_1, x_2)\ U^{-1}\end{aligned}}$$

En la figura 6.8 se representan las coordenadas contravariantes y covariantes de un punto Q cualquiera, en el caso habitual de que los vectores de la base, $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$, tengan módulo unidad.

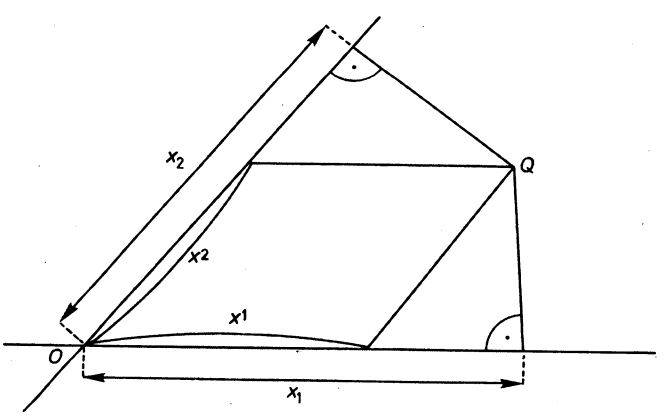


Fig. 6.8

En el caso de una base ortonormal, coinciden las coordenadas contravariantes y covariantes.

Ejercicio

Hallar las coordenadas covariantes del vector de coordenadas contravariantes (2, 3) sabiendo que la matriz fundamental es $U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.23. DIVERSAS EXPRESIONES ANALITICAS DEL PRODUCTO ESCALAR

1) *Coordenadas contravariantes.*

Quedó dicho que su expresión es

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x^1 y^1 u_{11} + x^1 y^2 u_{12} + x^2 y^1 u_{21} + x^2 y^2 u_{22} = (x^1\ x^2)\, U \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

2) *Coordenadas contravariantes y covariantes*

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \underbrace{\boxed{(x^1\ x^2)\, U}}_{(x_1\ x_2)} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = x_1 y^1 + x_2 y^2$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} = \underbrace{\boxed{(y^1\ y^2)\, U}}_{(y_1\ y_2)} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = (y_1\ y_2) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = y_1 x^1 + y_2 x^2$$

3) *Coordenadas covariantes*

NOTA PRELIMINAR: Si A es una matriz, se llama *transpuesta (o traspuesta) de A*, y se representa por A' (a veces ${}^tA$) a la matriz que resulta al cambiar filas por columnas.

Se verifica

$$\boxed{(AB)' = B'\, A'}$$

En efecto:

$$\begin{array}{lll} A \times B = (c_{ij}) & \text{tal que} & c_{ij} = \text{fila } i_A \times \text{col } j_B \\ (A \times B)' = (\gamma_{ij}) & \text{tal que} & \gamma_{ij} = c_{ji} = \text{fila } j_A \times \text{col } i_B \\ B' \times A' = (\varepsilon_{ij}) & \text{tal que} & \varepsilon_{ij} = \text{fila } i_{B'} \times \text{col } j_{A'} = \text{col } i_B \times \text{fila } j_A \end{array}$$

luego

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}$$

y, por lo tanto,

$$(AB)' = B'\,A', \qquad \text{c.q.d.}$$

Según 2)

$$\bar{x}\,\bar{y} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

Ahora bien:

$$(y^1\ y^2) = (y_1\ y_2)\,U^{-1}$$

y tomando transpuestas en ambos miembros, usando las conclusiones de la nota preliminar, resulta

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = (U^{-1})' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

luego

$$\bar{x}\,\bar{y} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\,(U^{-1})' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(En este caso como U, U^{-1} son simétricas coinciden con sus transpuestas, de donde $(U^{-1})' = U^{-1}$).

6.24. INTERPRETACION DE LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION DE LA RECTA

Consideremos la ecuación de la recta $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma = 0$.

Se sabe que $(x^1\ x^2)$ son las coordenadas contravariantes de un punto genérico de la recta.

Sean $(a^1\ a^2)$ las coordenadas de un punto A, fijado en la recta.

Se verifica

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma = 0 \\ \alpha a^1 + \beta a^2 + \gamma = 0 \end{array}\right\}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\alpha\,(x^1 - a^1) + \beta\,(x^2 - a^2) = 0$$

Como (x^1, x^2) y (a^1, a^2) son las coordenadas de dos puntos de la recta, resulta que $(x^1 - a^1, x^2 - a^2)$ son las componentes (o coordenadas) de un vector $\overrightarrow{AX}$ contenido en la recta.

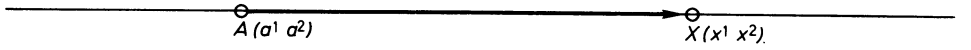


Fig. 6.9

Siendo $\bar{n}$ un vector de componentes covariantes los coeficientes de la recta (α, β), resulta que

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = (x^1 - a^1, x^2 - a^2) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha(x^1 - a^1) + \beta(x^2 - a^2) = 0;$$

o sea, que (α, β) *son las componentes covariantes de un vector perpendicular a* $\overrightarrow{AX}$, *o, lo que es lo mismo, a la recta* $\alpha x^1 + \beta x^2$ *ó* $x^2 + \gamma = 0$.

Ejercicio.

Supongamos la ecuación de la recta en coordenadas covariantes $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0$.

Interprétese (α, β).

6.25. DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

Por la propiedad *positiva* del producto escalar se verifica

$$(\bar{x} + \lambda\bar{y})(\bar{x} + \lambda\bar{y}) \geq 0,$$

cualesquiera que sean los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$, y el número real λ.

La anterior condición equivale a

$$(\bar{y}\,\bar{y})\lambda^2 + 2(\bar{x}\,\bar{y})\lambda + \bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0 \qquad [1]$$

Si se considera la función de la variable λ

$$u = \bar{y}\,\bar{y}\,\lambda^2 + 2(\bar{x}\,\bar{y})\lambda + \bar{x} \cdot \bar{x}$$

resulta ser una parábola de dirección el eje u, tal que $\lim_{\lambda \to \infty} u = +\infty$, pues el coeficiente de λ^2 es positivo. Es del tipo de los tres dibujos en la Fig. 6.10.

Ahora bien, como se ha de verificar $u \geq 0$, según [1], esto quiere decir que sólo son posibles los casos ⓑ y ⓒ; luego la ecuación

$$(\bar{y}\,\bar{y})\lambda^2 + 2(\bar{x}\,\bar{y})\lambda + \bar{x} \cdot \bar{x} = 0$$

tiene dos raíces imaginarias o una raíz real doble y, por lo tanto, su discriminante es ≤ 0; o sea

$$(\bar{x}\,\bar{y})^2 - |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2 \leq 0$$

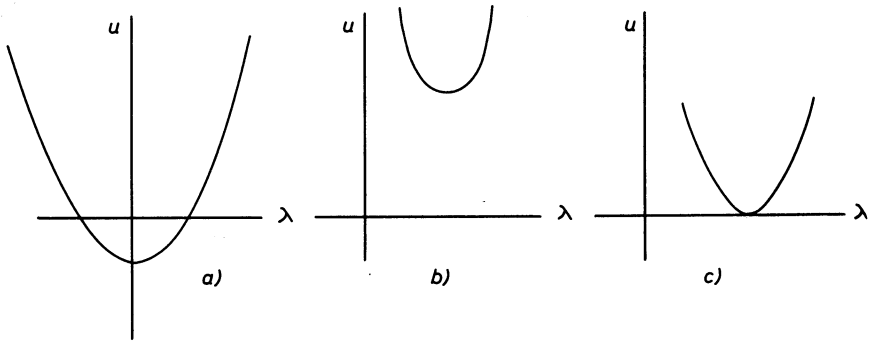


Fig. 6.10

o bien

$$\boxed{|(\bar{x}\,\bar{y})| \leq |\bar{x}|\,|\bar{y}|},$$

que constituye la desigualdad de Cauchy-Schwarz y se verifica para cualquier par de vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

Consecuencia de esta desigualdad es que $(\bar{x}\,\bar{y}) \leq |\bar{x}|\,|\bar{y}|$.

Adviértase que en el espacio vectorial ordinario la anterior desigualdad es evidente, pues

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}|\,|\bar{y}| \cos(\widehat{\bar{x}\,\bar{y}}) \qquad \text{y} \qquad |\cos(\widehat{\bar{x}\,\bar{y}})| \leq 1$$

Sin embargo, aquí ha quedado demostrada para cualquier espacio vectorial dotado de producto escalar.

6.26. ESPACIO METRICO

Si en el espacio geométrico ordinario se fija un segmento como unidad de longitud es posible asignar a cada par de puntos A, B un número real positivo que representaremos $d(A, B)$, que es la medida del segmento AB y se denomina *distancia* de A a B.

Por la Geometría elemental se sabe que

1. $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
2. $d(A, B) = d(B, A)$.
3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (desigualdad triangular).

El espacio geométrico ordinario decimos que es un *espacio métrico* porque en él hemos definido una distancia entre pares de puntos.

Si se tiene un conjunto cualquiera C y una aplicación

$$\begin{array}{c} C \times C \xrightarrow{d} \mathcal{R}_+ \\ (A, B) \longrightarrow d(A, B) \end{array}$$

que verifica las propiedades 1, 2 y 3 se dice que la aplicación d es una *distancia*, y que C, dotado de esta distancia, es un *espacio métrico*. Como se observa, este es otro concepto abstracto que procede de los conceptos de espacio y distancia ordinarios.

6.27. ESTRUCTURA METRICA LIGADA AL PLANO EUCLIDEO

Dados dos puntos A, B del plano euclídeo ordinario, les corresponde el vector $\{\overrightarrow{AB}\} = f(A, B)$ del plano vectorial. (Esta correspondencia es por ser plano afín.)

A este vector $\overrightarrow{AB}$ se le hace corresponder su módulo $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$.

$$\begin{array}{l} \Pi \times \Pi \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{//} \mathcal{R}_+ \\ (A, B) \longrightarrow \{\overrightarrow{AB}\} \longrightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \end{array}$$

La composición de las dos aplicaciones anteriores será:

$$\begin{array}{l} \Pi \times \Pi \xrightarrow{d} \mathcal{R}_+ \\ (A, B) \longrightarrow d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \end{array}$$

(En el producto escalar escribimos $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ en vez de $\{\overrightarrow{AB}\} \cdot \{\overrightarrow{AB}\}$, para abreviar.)

Vamos a demostrar que la aplicación d es una distancia:

1. $d(AB) = 0 \Leftrightarrow A = B$
   En efecto

$$\sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{O} \Leftrightarrow A = B$$

2. $d(AB) = d(BA)$.
   En efecto

$$\sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA}$$

y

$$AB \cdot AB = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -(-\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA}$$

(Se ha hecho uso de la propiedad de que en todo espacio vectorial por ser grupo se verifica $(-x)\,y = -xy = x(-y)$).

3. $d(AB) \leq d(AC) + d(CB)$.
Esta desigualdad equivale a

$$\sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \leq \sqrt{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}} + \sqrt{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB}},$$

y como ambos miembros son positivos equivale a la desigualdad que se obtiene elevando al cuadrado. Resulta

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \leq \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} + 2\sqrt{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}}\ \sqrt{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB}}$$

Pero

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

Luego se ha de demostrar

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} \leq \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} + 2\sqrt{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}}\ \sqrt{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB}},$$

que equivale a

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} \leq \sqrt{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}}\ \sqrt{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB}},$$

lo cual constituye la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Luego en Π, a partir del producto escalar hemos definido la distancia ordinaria, la que nos sirvió para establecer el concepto más general de distancia. Como Π está dotado de una distancia, resulta ser un espacio métrico.

Pero en general, en todo plano euclídeo se puede definir una distancia $d(AB) = \sqrt{f(AB) \cdot f(AB)}$, puesto que en su espacio vectorial asociado existe una multiplicación escalar.

En resumen, *todo plano euclídeo es al mismo tiempo un espacio métrico.*

6.28. PROBLEMAS METRICOS EN EL PLANO

En el plano euclídeo es posible abordar problemas relativos a distancias y ángulos (o sea, métricos), cosa que no era posible en el plano afín, donde sólo se pueden resolver problemas de incidencia.

Los problemas métricos son posibles porque el plano vectorial está dotado de una multiplicación escalar.

Vamos a considerar una referencia en el plano euclídeo $R = \{0; \bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ y su matriz fundamental

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

I. *Distancia entre dos puntos A, B*

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}; \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Ejemplo

Supongamos

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \qquad A = (3, 2) \qquad B = (4, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4 - 3, 0 - 2) = (1, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (1, -2) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} - 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 16 = 17 - 4\sqrt{3}, \text{ luego } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17 - 4\sqrt{3}}$$

II. *Angulo de dos rectas r, r'.*

Elegimos dos puntos cualesquiera de r: A, B.
Análogamente escogemos otros dos de r': A', B'.
El ángulo formado por las dos rectas será el ángulo formado por los dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$; o sea:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'}}{|\overrightarrow{AB}| \, |\overrightarrow{A'B'}|}$$

Ejemplo

Supongamos

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} r \equiv 2x^1 + x^2 - 2 = 0 \\ r' \equiv x^1 - x^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Elegimos dos puntos cualesquiera de la primera

$$A = (0, 2), B = (1, 0), \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1, -2)$$

Análogamente con la segunda:

$$A' = (0, 4), B' = (1, 5), \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = (1, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'} = (1, -2) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} - 8) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 8 = 9 - 3\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (1, -2)\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (1 - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} - 8)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 16 = 17 - 4\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'B'} = (1, -1)\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}, 4\sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 4 = 5 - 2\sqrt{3}$$

$$\varphi = \arccos \frac{9 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{17 - 4\sqrt{3}}\ \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$$

Existe otro procedimiento más corto teniendo en cuenta la interpretación del apartado 6.24.

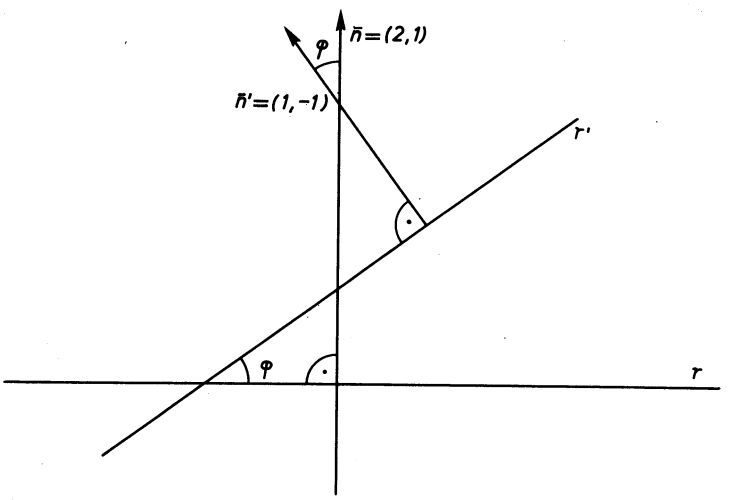


Fig. 6.11

El ángulo φ de las dos rectas es igual al ángulo de los dos vectores perpendiculares.

$$\bar{n} = (2, 1), \quad \bar{n}' = (1, -1)$$

$$\cos \varphi = \frac{\bar{n} \cdot \bar{n}'}{|\bar{n}|\,|\bar{n}'|} =$$

$$\frac{(2, 1)\left[\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}^{-1}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(2, 1)\left[\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}^{-1}\right]\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}\ \sqrt{(1, -1)\left[\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}^{-1}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Como n y n' son *covariantes* esta vez se utiliza la matriz inversa de U, o sea, U^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$ (Termínese como ejercicio.)

III. *Recta perpendicular por un punto a otra recta.*

Sea la recta $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma = 0$. Un vector perpendicular a esta recta será el vector de coordenadas covariantes (α, β); las contravariantes serán $(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta)\, U^{-1}$.

Si deseamos hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (a^1\ a^2)$ y es perpendicular a la recta $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma = 0$, resultará

$$\frac{x^1 - a^1}{\alpha'} = \frac{x^1 - a^2}{\beta'} \quad \text{o bien} \quad \beta'(x^1 - a^1) - \alpha'(x^2 - a^2) = 0$$

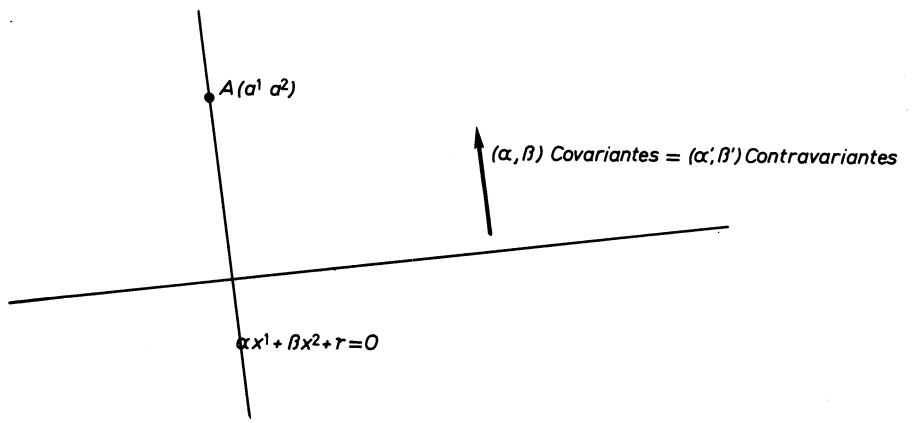


Fig. 6.12

Facilitamos el desarrollo de un ejercicio completo:

Se desea hallar la perpendicular a $3x^1 + 4x^2 - 3 = 0$, por el punto $(2, 5)$.

Supongamos que la matriz fundamental es $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$(\alpha'\beta') = (3, 4)\, U^{-1} = (3, 4) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = (3, -1)$$

La ecuación será

$$-1(x^1 - 2) - 3(x^2 - 5) = 0;\ \underline{x^1 + 3x^2 - 17 = 0}$$

IV. *Distancia de un punto a una recta.*

Se quiere calcular la distancia de un punto P a la recta

$$d \equiv \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

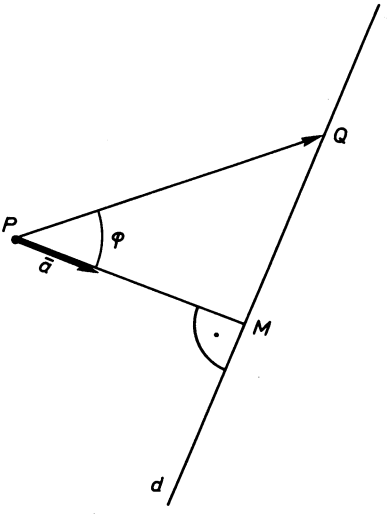


Fig. 6.13

Según se ha visto, las coordenadas covariantes de un vector de dirección PM (o sea, perpendicular a la recta) son (α, β).

Sea $\bar{a}$ el vector de dirección y sentido los de (α, β) y de módulo unidad. Sus componentes se obtendrán dividiendo (α, β) por el módulo de (α, β), o sea

$$\bar{a} = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\ \beta)\ U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}}, \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\ \beta)\ U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}} \right)$$

Conocido el vector perpendicular unitario $\bar{a}$, la distancia PM es inmediata. En efecto, sea Q un punto cualquiera de la recta.

$$|\overrightarrow{PM}| = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} = \underbrace{|\vec{a}|}_{1} |\overrightarrow{PQ}| \cos \varphi$$

Luego la distancia que se busca de P a d es

$$\boxed{|\overrightarrow{PM}| = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a}}$$

Ejemplo

Hállese la distancia del punto $P = (0, 3)$ a la recta $x^1 - 2x^2 - 1 = 0$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(1, -2)$ son las coordenadas covariantes de un vector perpendicular a la recta. El vector a de la misma dirección y unitario es

$$a = \left(\frac{1}{\sqrt{(1-2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}} \frac{-2}{\sqrt{(1-2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{-2}{\sqrt{2}} \right)$$

Sea Q un punto de la recta, por ejemplo $(1, 0)$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1, 0) - (0, 3) = (1, -3)$$

Como $\bar{a}$ viene en covariantes y $\overrightarrow{PQ}$ en contravariantes el producto escalar será

$$|\overrightarrow{PM}| = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} = (1, -3) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

El valor numérico de la distancia puede salir positivo o negativo, pues depende del sentido que tenga $\bar{a}$, pero siempre se toma en valor absoluto.

V. *Distancia entre dos rectas paralelas.*

Es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra.

Elegido un punto de coordenadas cómodas, se resuelve como en el caso anterior.

6.29. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

6.290.

Determínense las matrices fundamentales, correspondientes a las bases

$$\widehat{\bar{u}_1 \bar{u}_2} = 30^\circ \quad |\bar{u}_1| = 2; \quad |\bar{u}_2| = 5$$

$$\widehat{\bar{u}_1 \bar{u}_2} = 120^\circ \quad |\bar{u}_1| = 3; \quad |\bar{u}_2| = 2$$

6.291.
Determínese el producto escalar de los vectores $\bar{x} = (3, -2)\, \bar{y} = (5, 1)$, respecto de la base primera del ejercicio anterior.

6.292.
Determínese el módulo y ángulo que forman los siguientes vectores: $\bar{x} = (1, 2)$ $\bar{y} = (-2, 3)$. Tómese como base la segunda del ejercicio 6.290.

6.293.
Dada la matriz fundamental $U = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, calcúlese la distancia entre los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (0, 7)$.

6.294.
Dada la matriz fundamental $U = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, calcúlese el ángulo de las rectas

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4 = 0 \end{cases}$$

6.295.
Dada la matriz fundamental $U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, determínense las coordenadas covariantes de los vectores $\bar{a} = (3, 1)$ y $\bar{b} = (-2, 5)$.

6.296.
Con la misma matriz fundamental del ejercicio anterior, hállese la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (1, 2)$ y es perpendicular a $x_1 + 3x_2 = 7$.

6.297.
Distancia del punto $P = (2, 1)$ a la recta $2x_1 - 4x_2 = 3$. Usese la matriz fundamental del ejercicio 6.295.

6.298.
Distancia entre las rectas paralelas $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 = 7 \end{cases}$, para $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.299.
Angulo de las rectas $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$, para la misma matriz fundamental del ejercicio anterior.

6.3

Espacio afín y euclídeo

6.301. Espacio afín

6.302. Biyección entre los puntos de E_0 y los vectores libres de V_3. Referencia de coordenadas

6.303. Recta en el espacio afín

6.304. Plano en el espacio afín

6.305. Posiciones relativas de dos y tres planos

6.306. Haz de planos

6.307. Rectas paralelas

6.308. Paralelismo de recta y plano

6.309. Dependencia lineal en espacios afines. Variedades lineales

6.3091. *Ecuaciones de la recta y el plano*
6.3092. *Puntos colineales*
6.3093. *Puntos coplanarios*
6.3094. *Dependencia lineal*

6.310. Espacio euclídeo. Estructura métrica

6.311. Regularidad de la matriz fundamental U

6.312. Coordenadas contravariantes y covariantes

6.313. Expresiones diversas del producto escalar

6.314. Perpendicularidad

6.315. Angulos

6.316. Distancias

6.317. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

6.3

Espacio afín y euclídeo de dimensión 3. Variedades lineales. Problemas de incidencias y métricos

6.301. Espacio afín

El espacio afín es el espacio ordinario de la Geometría elemental, análogamente a como se vio que el plano afín es el plano ordinario o intuitivo.

Si representamos por E el espacio ordinario, es inmediato que existe una aplicación f de $E \times E$ en el espacio vectorial V_3 de los vectores libres ordinarios.

$$E \times E \xrightarrow{f} V_3$$
$$(A, B) \longrightarrow f(A, B) = \{\overrightarrow{AB}\}$$

Esta aplicación tiene las mismas propiedades que en el caso del plano afín y son:

1. $f(AB) = -f(BA)$, pues $\{\overrightarrow{AB}\} = -\{\overrightarrow{BA}\}$
2. $f(AB) + f(BC) = f(AC)$, pues $\{\overrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{BC}\} = \{\overrightarrow{AC}\}$.
3. Dado un punto A y un vector libre $\bar{x}$ existe un punto único P, tal que $f(AP) = \bar{x}$. Esta propiedad es consecuencia de que con origen en cada punto existe un representante único de cada vector libre.

El conjunto de puntos del espacio E con la anterior aplicación que le relaciona con el espacio vectorial V_3 se llama *espacio afín de dimensión tres.*

En general, *un conjunto C cualquiera y una aplicación f de $C \times C$ en V_3 que verifica las propiedades* 1, 2 *y* 3 *se llama espacio afín de dimensión tres.*

En este caso se trata de un espacio afín abstracto, es decir, de una estructura puramente algebraica sugerida por el espacio intuitivo elemental.

6.302. Biyección entre los puntos de E_o y los vectores libres de V_3. Referencia de coordenadas

El espacio E con un punto fijo 0, llamado origen, se denotará E_0.

La aplicación f del espacio afín permite establecer una biyección entre los puntos de E_0 y los vectores libres de V_3, análogamente a lo que ocurría en el plano.

$$E_0 \xrightarrow{\varphi} V_3$$
$$A \longrightarrow \varphi(A) = \{\overrightarrow{OA}\}$$

Si en V_3 se fija una base $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$, a cada vector $\bar{x} \in V_3$ se le asigna biunívocamente una terna ordenada de números reales, sus coordenadas (o componentes), tales que $x = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3$.

$$E \xrightarrow{0} V_3 \longrightarrow V_3$$
$$A \longrightarrow \{\overrightarrow{OA}\} \longrightarrow (a_1\ a_2\ a_3)/\{\overrightarrow{OA}\} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3$$

El punto O y la base $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$ forman lo que llamaremos una referencia $R = \{O;\ \bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3\}$ del espacio E.

Esta referencia permite establecer una biyección entre los puntos del espacio y las ternas ordenadas de números reales.

$$E \xrightarrow{R = \{0;\ \bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3\}} \mathbb{R}^3$$
$$A \longrightarrow (a_1\ a_2\ a_3)/\{\overrightarrow{OA}\} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3$$

(a_1, a_2, a_3) *son las coordenadas de A respecto de la referencia de coordenadas R.*

En la figura 6.14 se visualiza la referencia de coordenadas.

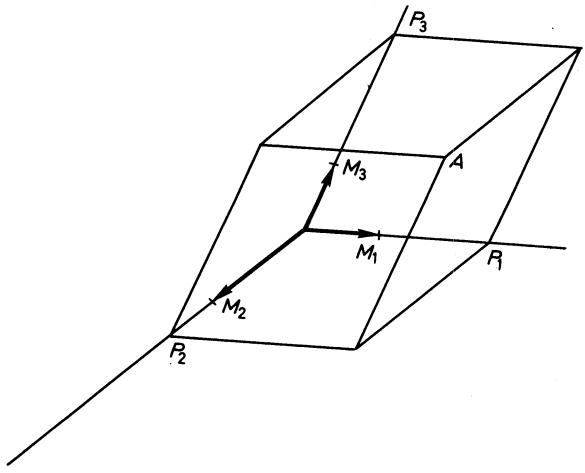


Fig. 6.14

$$\overrightarrow{OM_1} \in \bar{u}_1 \quad \overrightarrow{OP_1} \in a_1\bar{u}_1$$
$$\overrightarrow{OM_2} \in \bar{u}_2 \quad \overrightarrow{OP_2} \in a_2\bar{u}_2$$
$$\overrightarrow{OM_3} \in \bar{u}_3 \quad \overrightarrow{OP_3} \in a_3\bar{u}_3$$

6.303. Recta en el espacio afín

Una recta queda determinada por un punto y una dirección. Supongamos que el punto sea $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ y la dirección la del vector $\bar{p} = (p_1\ p_2\ p_3)$.

$\overrightarrow{PP'} \in \bar{p}$

$\{\overrightarrow{AX}\} = \lambda\bar{p}$

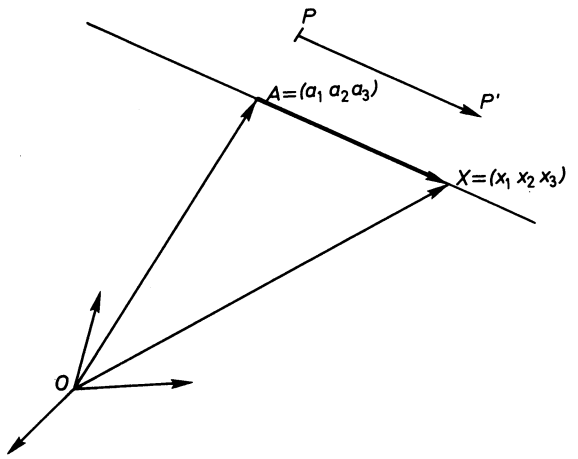


Fig. 6.15

Como $\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \{\overrightarrow{AX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\bar{p}$, donde X es un punto genérico de la recta, resulta que la ecuación vectorial es

$$\boxed{\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\bar{p}}$$

De la anterior ecuación, igualando las coordenadas, resultan las *ecuaciones paramétricas*:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda p_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda p_2 \\ x_3 &= a_3 + \lambda p_3 \end{aligned}}$$

Eliminando el parámetro λ, para lo cual basta despejar λ en las tres e igualar, se obtienen las ecuaciones *cartesianas*:

$$\boxed{\frac{x_1 - a_1}{p_1} = \frac{x_2 - a_2}{p_2} = \frac{x_3 - a_3}{p_3}}$$

La recta puede venir determinada por dos puntos $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ y $B = (b_1\ b_2\ b_3)$ en cuyo caso se puede tomar $\bar{p} = \{\overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ y queda reducida al caso anterior. Resulta:

Ecuación vectorial

$$\boxed{\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\}}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ x_2 &= a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \\ x_3 &= a_3 + \lambda(b_3 - a_3) \end{aligned}}$$

Ecuaciones cartesianas

$$\boxed{\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}}$$

6.304. Plano en el espacio afín

Sea el plano determinado por el punto A y las direcciones de los vectores libres $\bar{p}$ y $\bar{q}$.

$$\bar{p} = (p_1\ p_2\ p_3)$$
$$\bar{q} = (q_1\ q_2\ q_3)$$
$$A = (a_1\ a_2\ a_3)$$

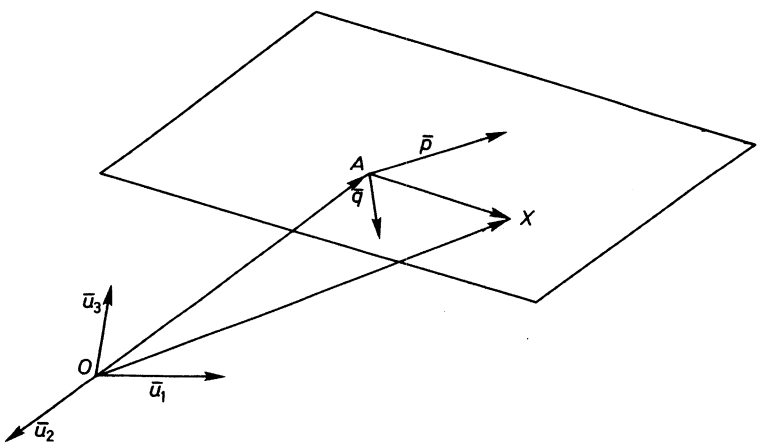


Fig. 6.16

Sea X un punto genérico del plano.
$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \{\overrightarrow{AX}\}$; pero $\{\overrightarrow{AX}\} = \lambda\,\bar{p} + \mu\,\bar{q}$, donde (λ, μ) son las coordenadas de $\{\overrightarrow{AX}\}$, vector contenido en el plano, respecto de la referencia $R' = \{A; \bar{p}, \bar{q}\}$, luego

Ecuación vectorial

$$\boxed{\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\,\bar{p} + \mu\,\bar{q}}$$

Igualando coordenadas en ambos miembros resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ x_3 &= a_3 + \lambda p_3 + \mu q_3 \end{aligned}}$$

Ecuaciones paramétricas

Eliminando los parámetros λ y μ, para lo cual basta despejar en las dos ecuaciones y sustituir en la tercera, resultará la ecuación cartesiana de la forma

$$\boxed{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0}$$

Las ecuaciones paramétricas pueden escribirse en la forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 - a_1 - \lambda p_1 - \mu q_1 &= 0 \\ x_2 - a_2 - \lambda p_2 - \mu q_2 &= 0 \\ x_3 - a_3 - \lambda p_3 - \mu q_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Estas ecuaciones implican que el sistema homogéneo

$$\left.\begin{aligned} (x_1 - a_1)\,u + p_1 v + q_1 w &= 0 \\ (x_2 - a_2)\,u + p_2 v + q_2 w &= 0 \\ (x_3 - a_3)\,u + p_3 v + q_3 w &= 0 \end{aligned}\right\}$$

admite solución distinta de la trivial $(1, -\lambda, -\mu)$, por lo tanto, el determinante será nulo

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 - a_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 - a_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

Esta es la *ecuación cartesiana* del plano que puede escribirse directamente.

Si el plano viene definido por tres puntos $A = (a_1\ a_2\ a_3)$, $B = (b_1\ b_2\ b_3)$, $C = (c_1\ c_2\ c_3)$, basta con tomar $\bar{p} = \{\overrightarrow{AB}\}$, $\bar{q} = \{\overrightarrow{AC}\}$ y aplicar el método anterior.

$$\bar{p} = \{\overrightarrow{AB}\} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$
$$\bar{q} = \{\overrightarrow{AC}\} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$$

Resulta:

$$\boxed{\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda[\{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\}] + \mu[\{\overrightarrow{OC}\} - \{\overrightarrow{OA}\}]} \quad \textit{Ecuación vectorial}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda(b_1 - a_1) + \mu(c_1 - a_1) \\ x_2 &= a_2 + \lambda(b_2 - a_2) + \mu(c_2 - a_2) \\ x_3 &= a_3 + \lambda(b_3 - a_3) + \mu(c_3 - a_3) \end{aligned}} \quad \textit{Ecuaciones paramétricas}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0} \quad \textit{Ecuaciones cartesianas}$$

La ecuación cartesiana se puede deducir de la siguiente forma:

Sea $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0$ la ecuación del plano. Hemos de determinar $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ con la condición de que pase por los puntos A, B, C, o sea,

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0 \\ \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + \delta = 0 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 + \delta = 0 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 + \delta = 0 \end{cases}$$

La condición necesaria y suficiente para que exista solución no trivial $(\alpha\beta\gamma\delta)$ es

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esta expresión es la ecuación cartesiana y equivale a la ecuación obtenida anteriormente, en forma de determinante, pues basta restar la segunda fila de las demás.

6.305. Posiciones relativas de dos y tres planos

Caso de dos planos. Sean dos planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 + \gamma\, x_3 + \delta\ = 0 \\ \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1 = 0 \end{cases}$$

Para que los planos tengan puntos comunes, el sistema formado por ambas ecuaciones ha de ser compatible, o sea

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = r$$

Puede ocurrir que $r = 1$ ó $r = 2$.

Si $r = 1 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1} = \dfrac{\delta}{\delta_1}$, en cuyo caso ambos planos *coinciden.*

Si $r = 2$, el sistema tiene infinitas soluciones; los planos *se cortan según una recta.* (Basta resolver aplicando el Teorema de Rouché.)

Para que los planos no tengan puntos en común el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser incompatible, es decir,

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \neq r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

Como

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \leq 2,$$

la única posibilidad es que

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = 2,$$

en cuyo caso se deduce como condición necesaria y suficiente que

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} \neq \frac{\delta}{\delta_1},$$

que es la condición de *paralelismo* (pues decimos que dos planos son paralelos cuando no tienen ningún punto en común).

Caso de tres planos. Sean las ecuaciones de los planos

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0 \\ \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1 = 0 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \delta_2 = 0 \end{cases}$$

A) Para que tengan puntos comunes ha de ser compatible el sistema, o sea

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = r$$

a) Si $r = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$, en cuyo caso los tres planos se cortan en un punto único cuyas coordenadas se obtienen aplicando la regla de Cramer.

b) Si $r = 2$, una ecuación es combinación lineal de las otras dos y puede suprimirse. Los tres planos se cortan según una recta (son coaxiales).

c) Si $r = 1$, las tres ecuaciones son una misma; los planos son coincidentes.

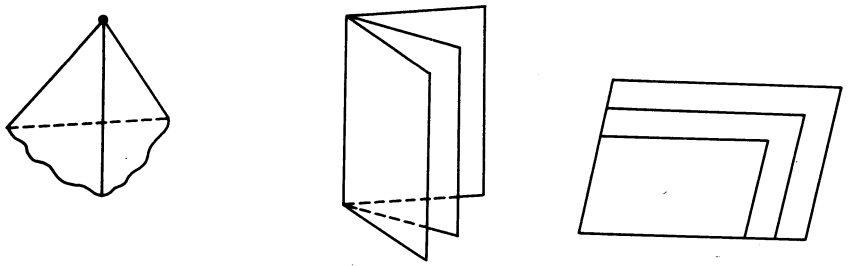


Fig. 6.17

B) Para que no tengan puntos comunes los tres planos, ha de ser incompatible el sistema, o sea

$$r = r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \neq r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = r'$$

El rango de la primera matriz es menor o igual que el de la segunda, y los rangos de ambas matrices difieren como máximo en una unidad.

Como los rangos son distintos, las únicas posibilidades son:

a) $r = 2$, $r' = 3$.

Si en las dos primeras filas existe un menor principal se cortan según una los dos primeros planos. Análogo razonamiento para los otros pares de filas. Las posiciones posibles se dibujan en los dos primeros esquemas de la figura 6.18.

b) $r = 1$, $r' = 2$.

Los tres planos son paralelos.

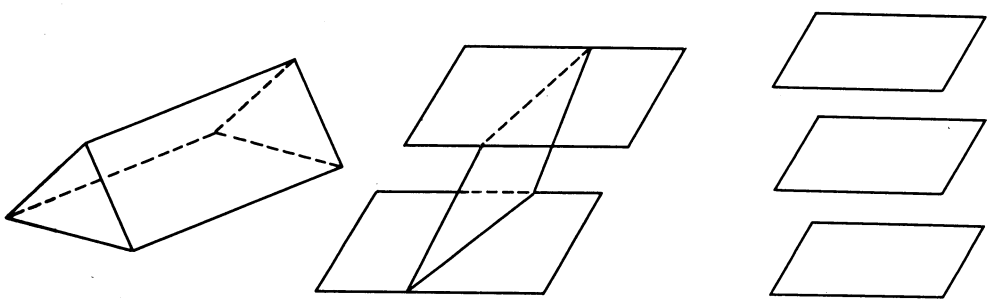


Fig. 6.18

6.306. Haz de planos

Considérense dos planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0 \\ \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1 = 0 \end{cases}$$

La ecuación general de los planos que pasan por la recta intersección de ambos es

$$\boxed{(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta) + \lambda(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1) = 0}$$

En efecto: La ecuación anterior representa un plano por ser lineal en las variables.

Cualquier punto de la recta intersección de los planos dados verifica sus ecuaciones, luego también la ecuación anterior, ya que resulta $0 + \lambda \cdot 0 = 0$, para cualquier valor real de λ.

El conjunto de planos que pasan por una recta se llama «haz de planos de arista la recta». La ecuación general que hemos escrito más arriba representa el haz de arista la recta intersección de los dos planos.

El conjunto de planos paralelos a un plano $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0$, se dice que forma un *haz de planos paralelos*. La ecuación general de los planos del haz es

$$\boxed{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta + \lambda = 0}$$

Es evidente, puesto que

$$\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma} \neq \frac{\delta}{\delta + \lambda}$$

6.307. Rectas paralelas

Sean las rectas que pasan por los puntos $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ y $B = (b_1\ b_2\ b_3)$, y tienen las direcciones $\bar{p} = (p_1\ p_2\ p_3)$ y $\bar{q} = (q_1\ q_2\ q_3)$, respectivamente.

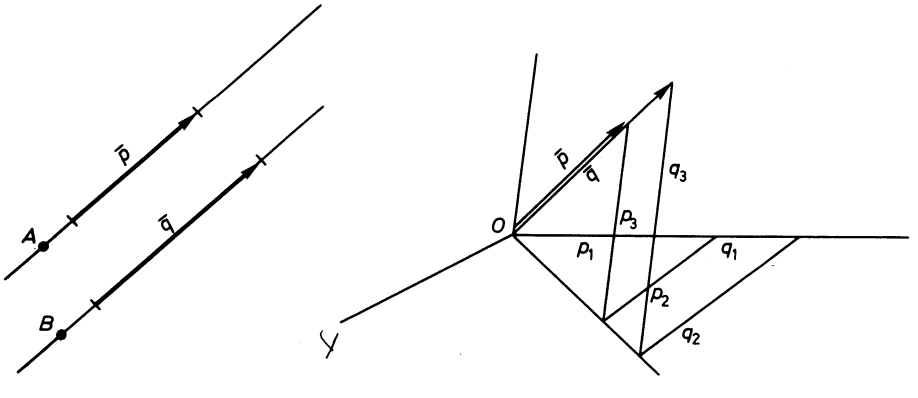


Fig. 6.19

La condición necesaria y suficiente para que las rectas

$$\frac{x_1 - a_1}{p_1} = \frac{x_2 - a_2}{p_2} = \frac{x_3 - a_3}{p_3} \quad \text{y} \quad \frac{x_1 - b_1}{q_1} = \frac{x_2 - b_2}{q_2} = \frac{x_3 - b_3}{q_3}$$

sean paralelas es que sus vectores de dirección lo sean, lo cual equivale a que las componentes de los mismos sean proporcionales.

$$\boxed{\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}}$$

Esto puede observarse en la figura 6.19 por consideraciones geométricas de semejanza. También, escribiendo simplemente $\bar{p} = \lambda \bar{q}$.

Cuando las ecuaciones de una recta no vienen escritas en la forma anterior, sino como intersección de dos planos

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 + \delta' = 0 \\ \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 + \delta'' = 0 \end{array}\right\},$$

se presenta el problema de hallar las coordenadas de un vector de dirección, que son precisamente las coordenadas de un punto de la paralela por el origen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 = 0 \\ \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Se acostumbra a tomar

$$\left(\begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \gamma' & \alpha' \\ \gamma'' & \alpha'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}\right)$$

La condición de paralelismo es la misma anterior, aplicada a este vector de dirección.

6.308. Paralelismo de recta y plano

Para que una recta sea paralela a un plano ha de ser incompatible el sistema formado por la ecuación del plano y las ecuaciones de la recta.

Como una recta viene definida por la intersección de dos planos, el sistema que ha de ser incompatible será

$$\begin{array}{ll} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0 & \text{ecuación del plano} \\ \left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1 = 0 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \delta_2 = 0 \end{array}\right\} & \text{ecuaciones de la recta} \end{array}$$

Se ha de verificar:

1.º) $$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 2$$

(No puede ser $r = 1$, puesto que los dos últimos planos determinan una recta y, por lo tanto, se cortan.)

2.º) $$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = 3$$

Al estudiar más adelante el espacio euclídeo, será posible establecer condiciones más sencillas.

6.309. Dependencia lineal en espacios afines. Variedades lineales

6.3091. *Ecuaciones de la recta y el plano*

Ha quedado establecido que la ecuación de la recta definida por los puntos A, B tiene la forma vectorial

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda[\{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\}] = (1 - \lambda)\{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\{\overrightarrow{OB}\}$$

que puede expresarse

$$\begin{gathered} \{\overrightarrow{OX}\} = \lambda_1\{\overrightarrow{OA}\} + \lambda_2\{\overrightarrow{OA}\} \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{gathered}$$

La ecuación del plano definido por tres puntos A, B, C en forma vectorial es

$$\begin{aligned} \{\overrightarrow{OX}\} &= \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda[\{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\}] + \mu[\{\overrightarrow{OC}\} - \{\overrightarrow{OA}\}] = \\ &= (1 - \lambda - \mu)\{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\{\overrightarrow{OB}\} + \mu\{\overrightarrow{OC}\} \end{aligned}$$

que puede tener la forma

$$\begin{gathered} \{\overrightarrow{OX}\} = \lambda_1\{\overrightarrow{OA}\} + \lambda_2\{\overrightarrow{OB}\} + \lambda_3\{\overrightarrow{OC}\} \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{gathered}$$

Si se escribe A en vez de $\{\overrightarrow{OA}\}$, B en vez de $\{\overrightarrow{OB}\}$, etc., lo cual es lógico porque el espacio afín está formado por los puntos A, B, ... y no por los vectores $\{\overrightarrow{OA}\}$, $\{\overrightarrow{OB}\}$, ... resulta:

Ecuación de la recta AB:

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B$$
$$1 = \lambda_1 + \lambda_2$$

Ecuación del plano ABC:

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$$
$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

Como se ve, la semejanza entre la ecuación de la recta y la del plano es total.

6.3092. *Puntos colineales*

Se llaman puntos *colineales* los que pertenecen a la misma recta.

Un punto genérico X de la recta AB se dice que depende linealmente de los puntos A y B. Por lo tanto

$$X \text{ depende linealmente de } \{A, B\} \overset{\text{(def.)}}{\Leftrightarrow} X = \lambda_1 A + \lambda_2 B,\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2$$

Para determinar una recta bastan dos puntos, pero también puede venir definida superabundantemente por más de dos, por ejemplo, tres, A, B, C.

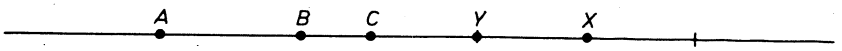


Fig. 6.20

Para cualquier punto de la recta X, se verifica

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$$
$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

En efecto: Sea Y un punto de la recta AB.
Por lo tanto, $Y = \gamma_1 A + \gamma_2 B$, $1 = \gamma_1 + \gamma_2$.
Otro punto X de la recta YC verificará

$$X = \mu_1 C + \mu_2 Y,\ \mu_1 + \mu_2 = 1$$

luego

$$X = \mu_1 C + \mu_2(\gamma_1 A + \gamma_2 B) = \mu_2\gamma_1 A + \mu_2\gamma_2 B + \mu_1 C$$
$$\mu_2\gamma_1 + \mu_2\gamma_2 + \mu_1 = \mu_2(\underbrace{\gamma_1 + \gamma_2}_{\parallel 1}) + \mu_1 = \mu_2 + \mu_1 = 1$$

Esta propiedad se generaliza a n puntos de la recta

$$X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$$
$$1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

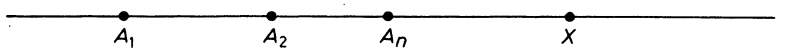


Fig. 6.21

Por definición, si n puntos son colineales, se dice que cualquier punto de su recta depende linealmente de ellos.

$$X \text{ d.l. } \{A_1\ A_2 \ldots A_n\} \Leftrightarrow X = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_n A_n \qquad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

6.3093. *Puntos coplanarios*

Se llaman puntos *coplanarios* los que están en el mismo plano.

Tres puntos no alineados A, B, C determinan un plano. Cualquier punto X del plano se dice que depende linealmente de A, B, C. Se verifica entonces

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C \qquad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

En general, dados n puntos coplanarios $A_1\ A_2 \ldots A_n$ se dice que cualquier punto X de su plano depende linealmente de ellos y se verifica

$$X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n \qquad 1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

Como puede observarse, la semejanza es total con el caso de los puntos colineales.

6.3094. *Dependencia lineal*

Basándonos en los casos anteriores, parece lógico establecer las definiciones formales siguientes:

Primera definición

X d.l. $\{A_1 \ldots A_n\} \Leftrightarrow X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n,\ 1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$

Segunda definición

$\{A_1 \ldots A_n\}$ l.d. $\Leftrightarrow$ Uno de los puntos depende linealmente de los otros.

Tercera definición

$\{A_1 \ldots A_n\}$ l.i. $\Leftrightarrow$ No son linealmente dependientes.

El máximo número de puntos linealmente independientes en la recta es dos.

El máximo número de puntos linealmente independientes en el plano es tres.

Cuarta definición

Si $\{A_1 \ldots A_p\}$ son linealmente independientes, el conjunto de puntos $X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_p A_p,\ 1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p$ se llama *variedad lineal de dimensión p*-1.

Como consecuencia, la recta es una variedad lineal de dimensión 1; el plano, de dimensión 2.

Las variedades lineales de dimensión n-1 se llaman *hiperplanos*.

En la recta afín los hiperplanos son puntos.
En el plano afín los hiperplanos son rectas.
En el espacio afín los hiperplanos son planos.

6.310. Espacio euclídeo. Estructura métrica

En el espacio vectorial tridimensional ordinario V_3 se define una multiplicación escalar, análogamente a como se hizo en el plano. De esta forma resulta que V_3 es un espacio vectorial euclídeo.

Se tiene entonces que el espacio afín E que venimos considerando es un *espacio euclídeo*, según la definición que ya conocemos, puesto que V_3 es un espacio vectorial euclídeo.

Definimos la aplicación de $E \times E$ en $\mathcal{R}_+$:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

Se demuestra igual que en el plano que esta aplicación es una *distancia*.

Como E está dotado de una distancia, resulta ser un *espacio métrico*.

6.311. Regularidad de la matriz fundamental U

A) Relación entre los cosenos directores de una recta

Se llaman *ángulos directores* de una recta los ángulos que forma con los ejes de coordenadas.

Se llaman *cosenos directores* de una recta los cosenos de sus ángulos directores.

Consideremos la recta OA de ángulos directores $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

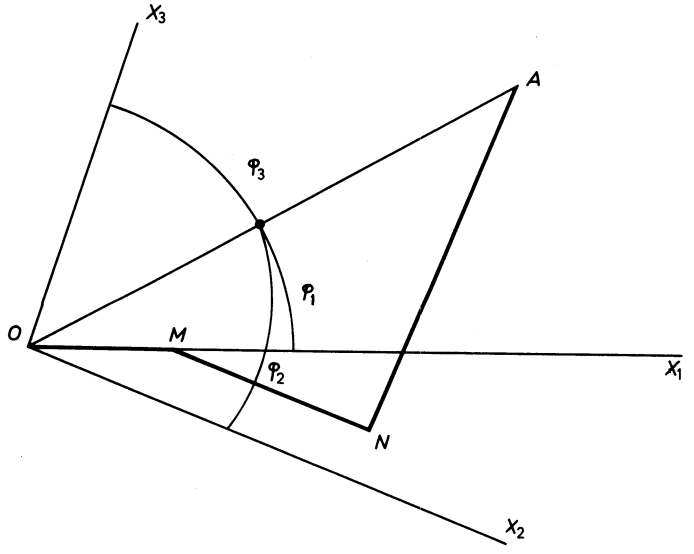


Fig. 6.22

$$\widehat{X_1 OX_2} = \lambda$$
$$\widehat{X_1 OX_3} = \mu$$
$$\widehat{X_3 OX_2} = \gamma$$

Vamos a proyectar la poligonal $OMNA$ ($MN // OX_2$; $NA // OX_3$) sobre las cuatro rectas OX_1, OX_2, OX_3, OA, igualando a la proyección de su resultante.

Sea

$$OM = a_1, \quad MN = a_2, \quad NA = a_3, \quad OA = \rho$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Proyección sobre } OX_1: a_1 + a_2 \cos\lambda + a_3 \cos\mu - \rho\cos\varphi_1 = 0 \\ \text{Proyección sobre } OX_2: a_1 \cos\lambda + a_2 + a_3 \cos\gamma - \rho\cos\varphi_2 = 0 \\ \text{Proyección sobre } OX_3: a_1 \cos\mu + a_2 \cos\gamma + a_3 - \rho\cos\varphi_3 = 0 \\ \text{Proyección sobre } OA : a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 + a_3 \cos\varphi_3 - \rho = 0 \end{array}\right\}$$

El anterior sistema homogéneo de las variables $(a_1, a_2, a_3, -\rho)$ es *compatible*, luego

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & \cos\varphi_1 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\gamma & \cos\varphi_2 \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 & \cos\varphi_3 \\ \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 & \cos\varphi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

relación entre los cosenos directores que han de verificar *todas las rectas* y, en particular, la verificará la recta perpendicular al plano $Ox_1 x_2$, para la cual

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

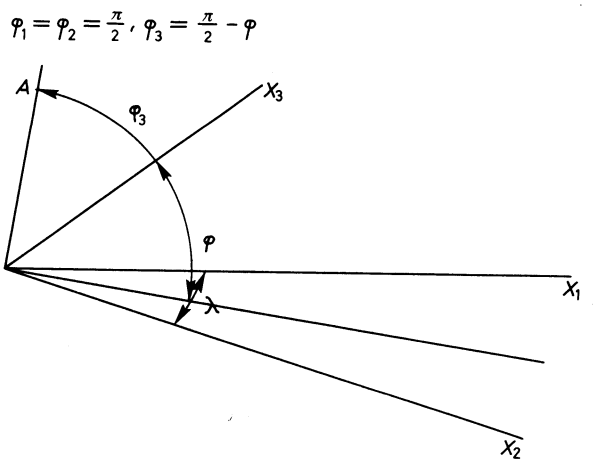


Fig. 6.23

luego queda

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & 0 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\gamma & 0 \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\varphi & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\lambda$$

B) Volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$

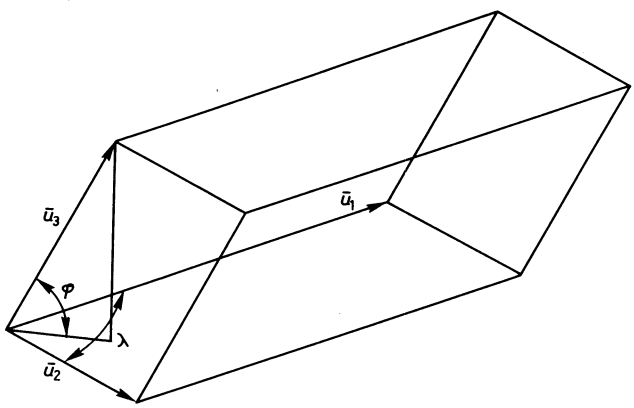


Fig. 6.24

Volumen = (Area de la base) × (altura) = $(|\bar{u}_2|\,|\bar{u}_2|\operatorname{sen}\lambda) \times (|\bar{u}_3|\operatorname{sen}\varphi) =$
$= |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2|\,|\bar{u}_3|\operatorname{sen}\lambda \cdot \operatorname{sen}\varphi$

C) Regularidad de U

Demostremos que la matriz U es regular. En efecto,

$$U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |\bar{u}_1|^2 & |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2|\cos\lambda & |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_3|\cos\mu \\ |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_3|\cos\mu & |\bar{u}_2|\,|\bar{u}_3|\cos\gamma & |\bar{u}_3|^2 \end{vmatrix}$$

$$= |\bar{u}_1|^2\,|\bar{u}_2|^2\,|\bar{u}_3|^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = |\bar{u}_1|^2\,|\bar{u}_2|^2\,|\bar{u}_3|^2 \operatorname{sen}^2\lambda \operatorname{sen}^2\varphi =$$
$$= (\text{volumen paralelepípedo})^2$$

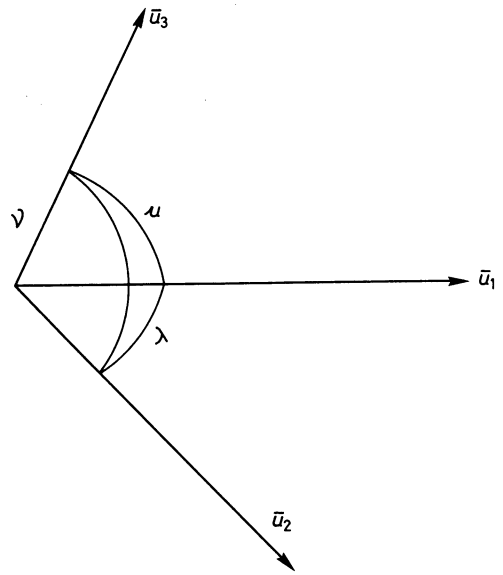


Fig. 6.25

Para que $|U| = 0$, o sea, para que el volumen del paralelepípedo sea nulo, las tres rectas habrían de ser coplanarias, lo cual es imposible, pues los vectores $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$ son linealmente independientes por formar base; luego

$$|U| \neq 0, \quad \text{c.q.d.}$$

6.312. Coordenadas contravariantes y covariantes

De ahora en adelante representaremos con supraíndices las coordenadas ordinarias, a las que llamaremos *contravariantes*.

Así, $\bar{x} = x^1\bar{u}_1 + x^2\bar{u}_2 + x^3\bar{u}_2$ tiene de coordenadas $(x^1\ x^2\ x^3)$ respecto de la base $B = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$.

Definimos las *coordenadas covariantes* exactamente igual que lo hicimos en el plano. Se representan con subíndices.

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x} \cdot \bar{u}_1 = x^1u_{11} + x^2u_{21} + x^3u_{22} \\ x_2 &= \bar{x} \cdot \bar{u}_2 = x^1u_{12} + x^2u_{22} + x^3u_{32} \\ x_3 &= \bar{x} \cdot \bar{u}_3 = x^1u_{13} + x^2u_{23} + x^3u_{33} \end{aligned}$$

Usando la notación matricial

$$\boxed{(x_1\ x_2\ x_3) = (x^1\ x^2\ x^3)\ U}$$

y puesto que U es regular, según vimos en el apartado anterior, tiene matriz inversa U^{-1}, lo que permite escribir

$$\boxed{(x^1\ x^2\ x^3) = (x_1\ x_2\ x_3)\ U^{-1}}$$

6.313. Expresiones diversas del producto escalar

1. $\bar{x} \cdot \bar{y} = (x^1\ x^2\ x^3)\ U \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$

2. $\bar{x} \cdot \bar{y} = (x^1\ x^2\ x^3)\ U \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = x_1y^1 + x_2y^2 + x_3y^3$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} = (y^1\ y^2\ y^3)\ U \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (y_1\ y_2\ y_3) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = y_1x^1 + y_2x^2 + y_3x^3$$

3. $\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$, pero $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = (U^{-1})' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, luego

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1\ x_2\ x_3)\ (U^{-1})' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

6.314. Perpendicularidad

Sea el plano $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \rho = 0$. Si $A = (a^1\ a^2\ a^3)$ es un punto del plano se verificará $\alpha a^1 + \beta a^2 + \gamma a^3 + \delta = 0$.

Restando queda $\alpha(x^1 - a^1) + \beta(x^2 - a^2) + \gamma(x^3 - a^3) = 0$.

Como $(x^1 - a^1,\ x^2 - a^2,\ x^3 - a^3)$ son las coordenadas (o componentes) de un vector $\overrightarrow{AX}$ contenido en el plano, donde A es fijo y X variable, resulta que:

Si $\bar{b} = (\alpha, \beta, \gamma)$ es un vector en coordenadas covariantes,

$$\overrightarrow{AX} \cdot \bar{b} = \alpha(x^1 - a^1) + \beta(x^2 - a^2) + \gamma(x^3 - a^3) = 0$$

y, por lo tanto, $\bar{b}$ es *perpendicular* al plano.

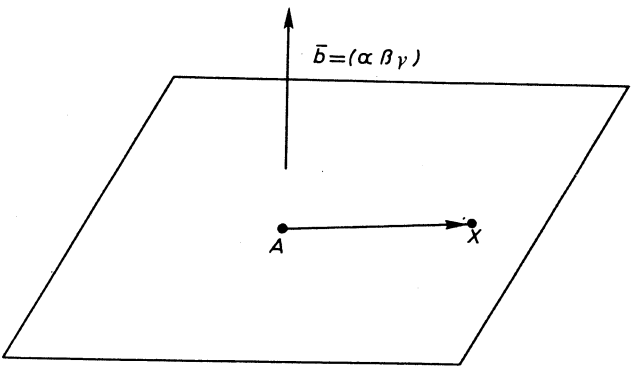


Fig. 6.26

Consecuencias:

1.ª *Plano paralelo por* $A = (a^1\ a^2\ a^3)$ *al plano* $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta = 0$

Puesto que es paralelo al anterior tendrá el mismo vector normal $(\alpha\ \beta\ \gamma)$; y como ha de pasar por $A = (a^1\ a^2\ a^3)$ será

$$\alpha(x^1 - a^1) + \beta(x^2 - a^2) + \gamma(x^3 - a^3) = 0$$

2.ª *Recta que pasa por* $A = (a^1\ a^2\ a^3)$ *y perpendicular al plano*

$$\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta = 0$$

(α, β, γ) son las coordenadas covariantes de un vector paralelo a la recta que se busca.

Si sus coordenadas contravariantes son $(\alpha'\ \beta'\ \gamma') = (\alpha\ \beta\ \gamma)\ U^{-1}$, la ecuación de la recta será

$$\frac{x^1 - a^1}{\alpha'} = \frac{x^2 - a^2}{\beta'} = \frac{x^3 - a^3}{\gamma'}$$

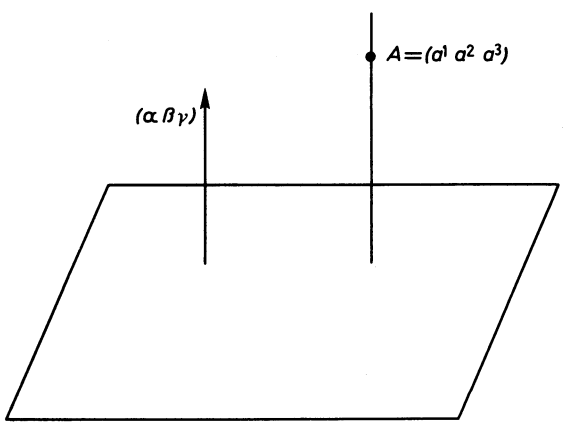


Fig. 6.27

3.ª *Plano que pasa por un punto y perpendicular a una recta*
El punto $A = (a^1\ a^2\ a^3)$, la recta

$$\frac{x^1 - b^1}{p^1} = \frac{x^2 - b^2}{p^2} = \frac{x^3 - b^3}{p^3};$$

$(p^1\ p^2\ p^3)$ son las coordenadas contravariantes de un vector que tiene la dirección de la recta, o sea, perpendicular al plano que se busca. Las coordenadas covariantes de este mismo vector serán $(p_1\ p_2\ p_3) = (p^1\ p^2\ p^3)\ U$, luego la ecuación del plano será $p_1(x^1 - a^1) + p_2(x^2 - a^2) + p_3(x^3 - a^3) = 0$.

4.ª *Condición necesaria y suficiente para que la recta*

$$\frac{x^1 - a^1}{p^1} = \frac{x^2 - a^2}{p^2} = \frac{x^3 - a^3}{p^3}$$ sea paralela al plano $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta = 0$.

Basta obligar a que el vector de coordenadas contravariantes $(p^1\ p^2\ p^3)$ y el vector de coordenadas covariantes $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ sean perpendiculares, o sea

$$\alpha p^1 + \beta p^2 + \gamma p^3 = 0$$

6.315. Angulos

1. *Angulo de dos rectas*

$$\frac{x^1 - a^1}{p^1} = \frac{x^2 - a^2}{p^2} = \frac{x^3 - a^3}{p^3};$$

$$\frac{x^1 - b^1}{q^1} = \frac{x^2 - b^2}{q^2} = \frac{x^3 - b^3}{q^3}$$

El ángulo que forman los dos vectores de dirección $\bar{p} = (p^1\ p^2\ p^3)$ $\bar{q} = (q^1\ q^2\ q^3)$, o sea

$$\cos\varphi = \frac{\bar{p}\cdot\bar{q}}{|\bar{p}|\,|\bar{q}|} = \frac{(p^1\ p^2\ p^3)\ U \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}}{\sqrt{(p^1\ p^2\ p^3)\ U \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}}\ \sqrt{(q^1\ q^2\ q^3)\ U \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}}}$$

2. *Angulo de dos planos* $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta = 0$; $\alpha_1 x^1 + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^3 + \delta_1 = 0$.

Es el ángulo que forman los vectores perpendiculares $\bar{b} = (\alpha\,\beta\,\gamma)$ $\bar{b}_1 = (\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ dados en coordenadas covariantes.

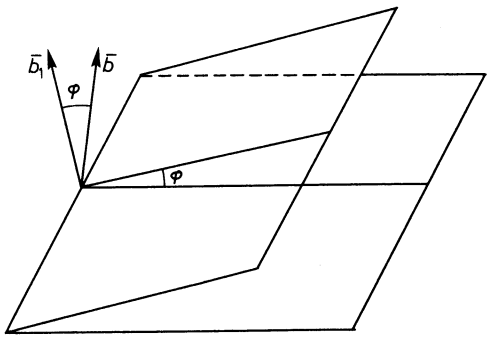


Fig. 6.28

$$\cos\varphi = \frac{\bar{b}\cdot\bar{b}_1}{|\bar{b}|\,|\bar{b}_1|} = \frac{(\alpha\,\beta\,\gamma)\,(U^{-1})'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}}{\sqrt{(\alpha\,\beta\,\gamma)\,(U^{-1})'\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}\ \sqrt{(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)\,(U^{-1})'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta^1\\ \gamma_1\end{pmatrix}}}$$

3. *Angulo de la recta*

$$\frac{x^1 - a^1}{p^1} = \frac{x^2 - a^2}{p^2} = \frac{x^3 - a^3}{p^3}$$

con el plano

$$\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta = 0$$

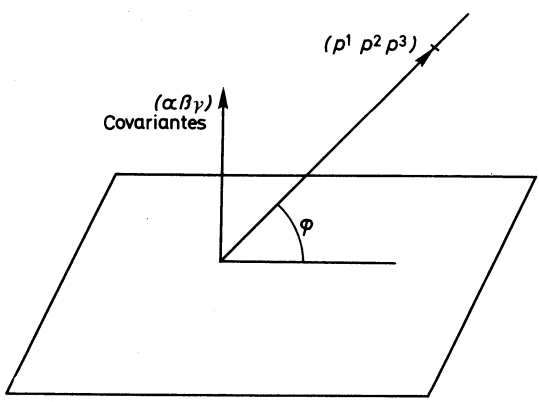


Fig. 6.29

El ángulo que forma la recta con el plano es el complementario del que forman los vectores cuyas coordenadas son

$$\begin{matrix}(p^1\ p^2\ p^3) & \text{contravariantes}\\ (\alpha\ \ \beta\ \ \gamma\ ) & \text{covariantes}\end{matrix}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{(\alpha\,\beta\,\gamma)\begin{pmatrix}p^1\\p^2\\p^3\end{pmatrix}}{\sqrt{(\alpha\,\beta\,\gamma)\,(U^{-1})'\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}}\ \sqrt{(p^1\,p^2\,p^3)\,U\begin{pmatrix}p^1\\p^2\\p^3\end{pmatrix}}}$$

6.316. Distancias

1. *Distancia entre dos puntos*

Sean $A = (a^1\ a^2\ a^3)$, $B = (b^1\ b^2\ b^3)$

$$d(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}},\quad \overrightarrow{AB} = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b^3 - a^3)$$

$$d(AB) = \sqrt{(b^1 - a^1, b^2 - a^2, b^3 - a^3)\,U\begin{pmatrix}b^1 - a^1\\b^2 - a^2\\b^3 - a^3\end{pmatrix}}$$

2. *Distancia de un punto a un plano*

Se traza por el punto P la perpendicular al plano al que corta en M. La distancia que buscamos es la existente entre los puntos P y M.

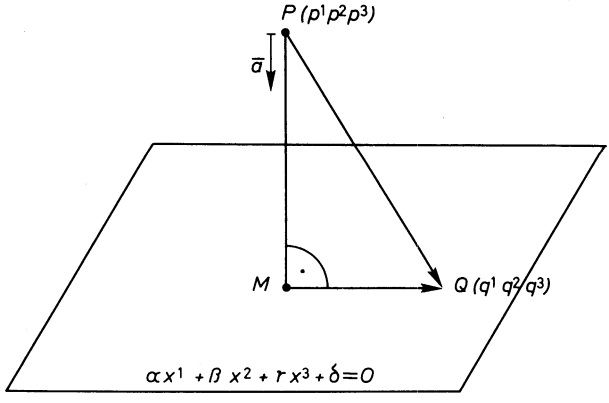


Fig. 6.30

$|\overrightarrow{PM}| = \overrightarrow{PQ} \cdot \bar{a}$, donde Q es un punto cualquiera del plano y $\bar{a}$ es un vector perpendicular al plano y de módulo unidad.

$$\overrightarrow{PQ} = (q^1 - p^1, q^2 - p^2, q^3 - p^3) \text{ contravariantes}$$

$$\bar{a} = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\ \beta\ \gamma)\, U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}} \quad \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\ \beta\ \gamma)\, U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}} \right.,$$

$$\left. \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha\ \beta\ \gamma)\, U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}} \right) \text{ covariantes}$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \bar{a} = \frac{|\alpha(q^1 - p^1) + \beta(q^2 - p^2) + \gamma(q^3 - p^3)|}{\sqrt{(\alpha\ \beta\ \gamma)\, U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}}$$

3. *Distancia de un punto a una recta*

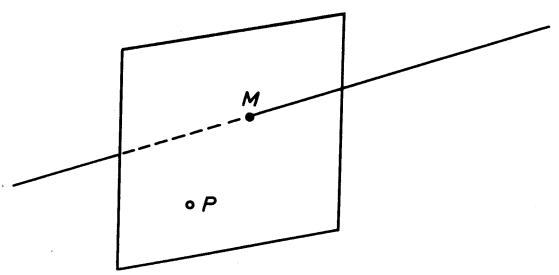


Fig. 6.31

Se traza por el punto P el plano perpendicular a la recta y se determinan las coordenadas de su intersección M con la recta.

La distancia pedida es $d(P, M)$.

4. *Distancia entre dos planos paralelos*

Es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro. Se reduce, entonces, al caso 2.

5. *Distancia entre dos rectas paralelas*

Es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra. Se reduce al caso 3.

6.317. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

6.3170.

Ecuaciones de las siguientes rectas:

a) recta que pasa por $A = (1, 1, 2)$ y que tiene la dirección $\bar{p} = (2, -3, 5)$;

b) recta definida por los puntos $A = (2, 1, -2)$, $B = (3, 1, 5)$.

Establézcanse ambas en forma cartesiana y paramétrica.

6.3171.

Ecuaciones de los siguientes planos:

a) plano determinado por el punto $A = (2, 0, 3)$ y las direcciones de los vectores $\bar{p} = (1, 2, 5)$ y $\bar{q} = (-1, 2, -6)$;

b) plano determinado por los puntos $A = (1, 3, 5)$, $B = (-2, 7, 3)$ y $C = (0, 4, 1)$.

Determínense ambos en forma cartesiana y paramétrica.

6.3172.

Estúdiense las posiciones relativas de las siguientes ternas y pares de planos:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 18x_2 - 9x_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

6.3173.

Hállense las ecuaciones de los siguientes planos:

a) plano que pasa por el punto (3, 7, 1) y por la recta intersección del par de planos:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3 = 0; \end{cases}$$

b) plano que pasa por el punto (1, 1, 3) y paralelo al plano $x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 4 = 0$.

6.3174.

Hállense las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (1, 0, 7)$ y paralela al vector $\bar{p} = (2, -1, -3)$;

b) recta que pasa por los puntos $A = (-1, 3, 1)$, $B = (1, 0, -6)$.

6.3175.

Hállese la matriz fundamental correspondiente a la base

$$\begin{vmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{vmatrix} = 2 \\ = 3 \\ = 2$$

Con esta matriz fundamental, calcúlense:

a) coordenadas covariantes de $\bar{x} = (3, 1, 0)$;

b) producto escalar de $\bar{x} = (1, 1, 4)\ \bar{y} = (0, 1, -2)$;

c) plano que pasa por $A = (1, 1, 1)$ y perpendicular a la recta

$$\frac{x^1 - 2}{2} = \frac{x^2}{4} = \frac{x^3 - 1}{-1}$$

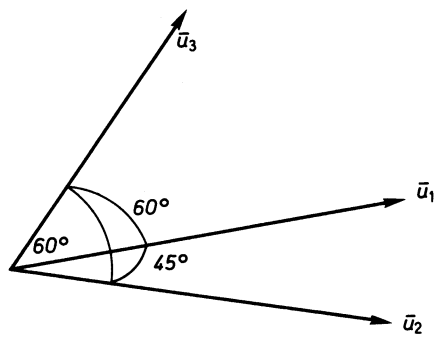


Fig. 6.32

d) recta que pasa por $A = (3, 0, -2)$ y perpendicular al plano

$$x^1 - x^2 + 3x^3 - 7 = 0$$

6.3176.

Ecuación del plano paralelo a $x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0$ por el punto $A = (3, 2, 5)$.

6.3177.

Con la referencia $|\bar{u}_1| = |\bar{u}_2| = 1$, $|\bar{u}_3| = 2$ se resolverán los siguientes ejercicios de ángulos

a) ángulo de las rectas:

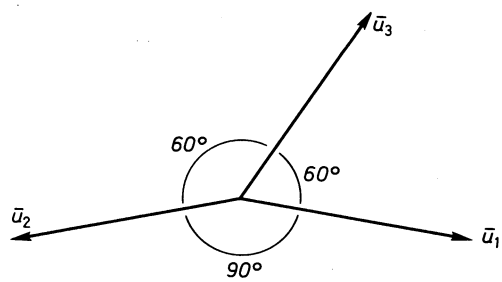


Fig. 6.33

$$\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 0}{3} = \frac{x^3 - 1}{5}, \quad \frac{x^1 - 7}{8} = \frac{x^2 - 3}{0} = \frac{x^3 - 5}{-1}$$

b) ángulo de los planos:

$$\begin{cases} x^1 - 3x^2 + 2x^3 - 5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 - 5x^3 + 4 = 0 \end{cases}$$

c) ángulo de la recta:

$$\frac{x^1 - 1}{2} = \frac{x^2 - 2}{-1} = \frac{x^3 - 4}{3}$$

con el plano

$$x^1 + 4x^2 - 3x^3 + 7 = 0$$

6.3178.

Con la misma referencia del ejercicio anterior, hállense

a) distancia entre los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(1, 0, -2)$;

b) distancia del punto $A(1, 2, 0)$ al plano $3x^1 + x^2 - x^3 + 5 = 0$;

c) distancia del punto $A(1, 0, 1)$ a la recta

$$\frac{x^1 - 0}{2} = \frac{x^2 - 1}{0} = \frac{x^3 - 2}{1};$$

d) distancia entre los dos planos paralelos $x^1 - 2x^2 + 3x^3 + 5 = 0$ y $2x^1 - 4x^2 + 6x^3 + 7 = 0$;

e) distancia entre las rectas paralelas

$$\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 1}{1} = \frac{x^3 + 3}{2} \text{ y } \frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2 + 1}{1} = \frac{x^3 - 0}{2}.$$

6.3179.

Hállese la mínima distancia entre las dos rectas

$$\frac{x^1 - 0}{0} = \frac{x^2 - 1}{1} = \frac{x^3 + 3}{2}; \quad \frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2 + 1}{-1} = \frac{x^3 - 0}{3}$$

y la ecuación de la perpendicular común.

6.4

Espacio proyectivo

6.401. Introducción

6.402. Recta proyectiva. Referencia elemental de coordenadas proyectivas

6.403. Referencia general de coordenadas proyectivas

6.404. Razones simple y doble de puntos alineados

6.405. Interpretación geométrica de las coordenadas afines y proyectivas

6.406. Plano proyectivo

6.407. Interpretación geométrica de las coordenadas afines y proyectivas

6.408. Generalización a dimensión ≥ 3

6.409. Dependencia e independencia lineal

6.410. Aplicación de los anteriores conceptos a casos concretos

6.411. Variedades lineales proyectivas

6.412. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

6.4

Espacio proyectivo

6.401. Introducción

En este capítulo se pretende introducir el concepto de *espacio proyectivo* como ampliación del espacio afín. En la definición desempeña un papel básico el espacio vectorial.

Insistimos mucho en el estudio de los sistemas de referencia de coordenadas proyectivas, destacando la correspondencia con los sistemas de referencia afines.

Finalmente, se establece la noción de dependencia e independencia lineal y se definen las variedades lineales.

Puede parecer un estudio abstracto y teórico, pero creemos que es fundamental como base sólida para ampliaciones posteriores.

El aspecto más interesante y que debe resaltarse es: el concepto intuitivo del que se parte (espacio afín al que se añaden los puntos del infinito) y su formalización sobre la estructura de espacio vectorial.

Es recomendable leer con calma y varias veces el capítulo para asimilar las ideas esenciales.

6.402. Recta proyectiva. Referencia elemental de coordenadas proyectivas

Supóngase una recta afín r (Fig. 6.34) con una referencia $R = \{O; \bar{u}_1\}$.

Sea V un punto situado fuera de la recta. Tomemos en el plano la referencia $R' = \{V; \bar{v}_1\, \bar{v}_2\}$, $\bar{v}_1 = \bar{u}_1$, $\bar{v}_2 = \{\overrightarrow{VO}\}$.

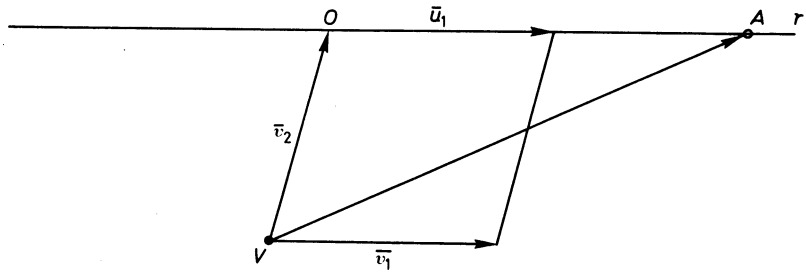


Fig. 6.34

Cada punto A de la recta tiene una coordenada (a_1) con relación a la referencia $R = \{O; \bar{u}_1\}$ de la recta; y unas coordenadas $(a_1, 1)$ con relación a la referencia $R' = \{V; \bar{u}_1\, \bar{u}_2\}$ del plano.

Las coordenadas $(a_1, 1)$ son las componentes del vector libre $\{\overrightarrow{VA}\}$ respecto de la base $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$.

A cada punto A corresponde una recta VA; y cada recta VA está determinada por el vector $\{\overrightarrow{VA}\}$, pero también lo está por cualquier otro vector que tenga la misma dirección, que será de la forma $\rho\{\overrightarrow{VA}\}$, $\rho \in \mathfrak{R} - \{0\}$.

Es decir, a cada punto $A(a_1)$ se le asigna sin ambigüedad la recta VA que viene determinada por cualquier vector $\rho\{\overrightarrow{VA}\}$ de coordenadas $\rho(a_1, 1)$, $\rho \in \mathfrak{R}$.

A cada punto de r corresponde una recta del haz de vértice V, pero no recíprocamente, pues la recta paralela por V a r no tiene punto correspondiente. Vamos a añadir a la recta afín un *punto ideal* que llamaremos *punto impropio o punto del infinito* al cual consideramos, en cierto modo, como la intersección de r con su paralela por V. De esta forma hemos suprimido el caso particular de la recta paralela, y entonces existe una biyección entre los puntos de la recta r (ampliada con el punto impropio) y las rectas del haz de vértice V.

La recta afín con el punto impropio constituye lo que se denomina la *recta proyectiva*.

Con estos antecedentes y la figura 6.35 se pueden establecer las siguientes definiciones y razonamientos:

1. Cada punto A puede identificarse con la recta VA, toda vez que existe una biyección entre los puntos de la *recta proyectiva* y el haz de rectas de vértice V.
2. Cada recta de vértice V queda determinada por cualquier vector $\{\overrightarrow{VX}\} = \rho\{\overrightarrow{VA}\}$ que tenga su dirección.
3. Las componentes de $\{\overrightarrow{VX}\} = \rho\{\overrightarrow{VA}\} = \rho(a_1, 1) = (\rho a_1, \rho)$ definen el punto A.
4. Las *coordenadas proyectivas* del punto A son, por definición, $(\rho a_1, \rho) = \rho(a_1, 1)$, $\rho \in \mathfrak{R} - \{O\}$, o sea las componentes de $\rho\{\overrightarrow{VA}\}$.
5. Las coordenadas proyectivas de cualquier punto A, no varían si se sustituye $(\bar{v}_1\, \bar{v}_2)$ por $(\lambda\bar{v}_1, \lambda\bar{v}_2)$, pues se transforman de $\rho(a_1, 1)$ en $\rho/\lambda(a_1, 1)$, o sea en proporcionales que, a estos efectos, son las mismas.

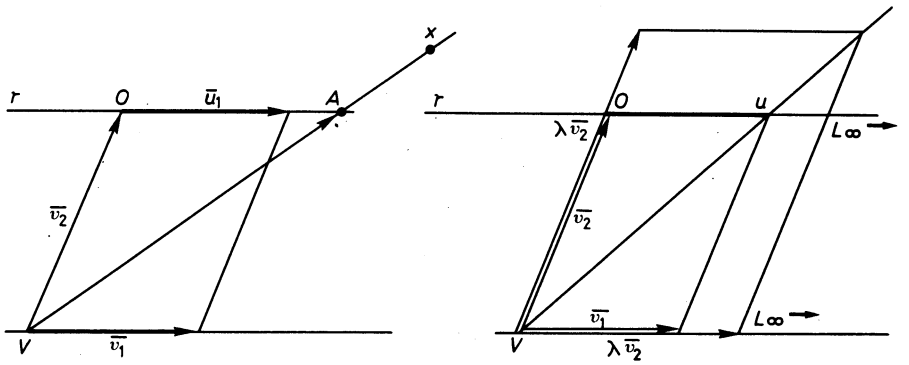


Fig. 6.35

6. La base $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ y las posibles bases $(\lambda\bar{v}_1, \lambda\bar{v}_2)$, para $\lambda \in \mathbb{R} - \{O\}$, vienen determinadas por la recta VU, o, lo que es lo mismo, por el punto U.

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \text{ tiene la dirección de } VU \text{ igual que } \lambda\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2$$

7. La referencia $R' = \{V; \bar{v}_1\, \bar{v}_2\}$ permite definir las coordenadas proyectivas de la recta proyectiva r.

   Esa referencia queda determinada por las tres rectas VL_∞, VO, VU, o, lo que es igual, por los tres puntos (L_∞, O, U) de la recta proyectiva. Puesto que estamos estudiando la recta proyectiva, parece más lógico elegir (L_∞, O, U) como referencia de coordenadas, pues los puntos anteriores son elementos de la recta proyectiva, cosa que no ocurría con $R' = \{V; \bar{v}_1\, \bar{v}_2\}$.

8. Los tres puntos (L_∞, O, U), llamados respectivamente *límite*, *origen* y *unidad*, constituyen lo que se llama la *referencia de coordenadas proyectiva.*

   Recordemos que la referencia de coordenadas afín era $R = \{O; \bar{u}_1\}$, o, lo que es lo mismo, el par de puntos (O, U), ya que $u_1 = \{\overrightarrow{OU}\}$.

   Para pasar a la referencia proyectiva lo único que hemos hecho ha sido añadir el punto límite L_∞.

9. Escribimos L_∞ porque en este caso particular L_∞ coincide con el punto ideal que hemos llamado punto impropio o punto del infinito. Ya se verá que en general no se da esta coincidencia.

10. El paso de coordenadas afines a proyectivas y recíprocamente se efectúa así:

Referencia afín		*Referencia proyectiva*
(O, U)		
o bien $R = \{O; \{\overrightarrow{OU}\}\}$		(L_∞, O, U)
$A = (a_1)$	$\longrightarrow$	$A = \rho(a_1, 1)$
$A = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)$	$\longleftarrow$	$A = (b_1, b_2) = b_2\left(\frac{b_1}{b_2}, 1\right)$
		$b_2 \neq 0$

El punto límite (en este caso también impropio) tiene coordenadas proyectivas pero no afines; son las componentes de $\rho\bar{v}_1 = \rho(1, 0) = (\rho, 0)$.

Las coordenadas del punto origen son las componentes de $\rho\{\overrightarrow{VO}\} = \rho\bar{v}_2 = \rho(0, 1) = (0, \rho)$.

Las coordenadas del punto unidad son las componentes de $\rho\{\overrightarrow{VU}\} = \rho(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \rho(1, 1) = (\rho, \rho)$.

6.403. Referencia general de coordenadas proyectivas

Vamos a considerar una recta r y un punto V del plano que no pertenece a r.

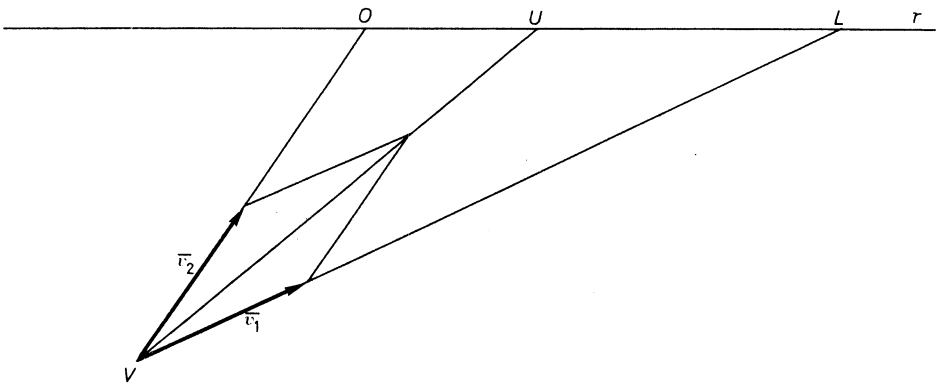


Fig. 6.36

Una referencia cualquiera de coordenadas del plano afín de origen V será $R = \{V; \bar{v}_1\ \bar{v}_2\}$. Esta referencia determina los puntos (L, O, U), que constituyen una *referencia proyectiva* de r.

Los puntos (L, O, U) siguen teniendo las mismas coordenadas que en el apartado anterior.

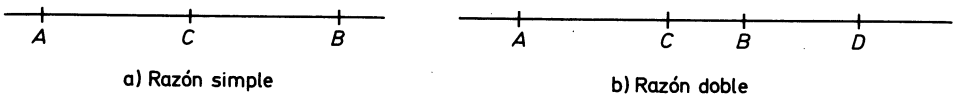
$$L = \rho(1, 0) \qquad O = \rho(0, 1) \qquad U = \rho(1, 1)$$

En este caso general el punto impropio *no* coincide con el punto límite, y sus coordenadas serán las componentes de cualquier vector paralelo a r.

Cabe destacar que en la recta proyectiva el punto impropio *no* es un punto especial.

6.404. Razones simple y doble de puntos alineados

Dados tres puntos A, B y C situados sobre una misma recta, se llama *razón simple* a la expresión $\frac{AC}{BC}$ y se escribe $(ABC) = \frac{AC}{BC}$.



a) Razón simple b) Razón doble

Fig. 6.37

Dados cuatro puntos A, B, C y D situados sobre la misma recta, se llama *razón doble* de los cuatro puntos al cociente de las dos razones simples.

$$\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} \text{ y se escribe } (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

Las razones simples (y por lo tanto la doble) pueden tener valor negativo, pues se considera el sentido de los segmentos.

La razón doble es $\neq 0, 1, \infty$ si los cuatro puntos son distintos, como resulta fácil demostrar. Cuando la razón doble vale -1 se llama *razón armónica*.

Propiedades importantes de la razón doble son:

1.ª $(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)} = \frac{1}{(BACD)}$.

2.ª $(ABCD) = 1 - (ACBD)$.

Resuélvase como ejercicio. Basándose en las propiedades anteriores, demuéstrese $(ABCD) = (CDAB)$.

Finalmente vamos a resolver el problema de determinar el cuarto punto de una razón doble, conocidos los otros tres y el valor de la razón doble.

$$(ABCD) = \frac{m}{n}$$

Por B se traza una recta cualquiera (Fig. 6.38) y se llevan a un lado y a otro longitudes proporcionales a m y a n, obteniéndose los puntos M y N.

Por A se traza una paralela a la recta MN. Se une N con C y se obtiene V. La recta VM determina D.

Esta construcción se justifica por la semejanza de los triángulos

$$\widehat{AVC} \sim \widehat{BNC} \quad \text{y} \quad \widehat{VAD} \sim \widehat{MBD}$$

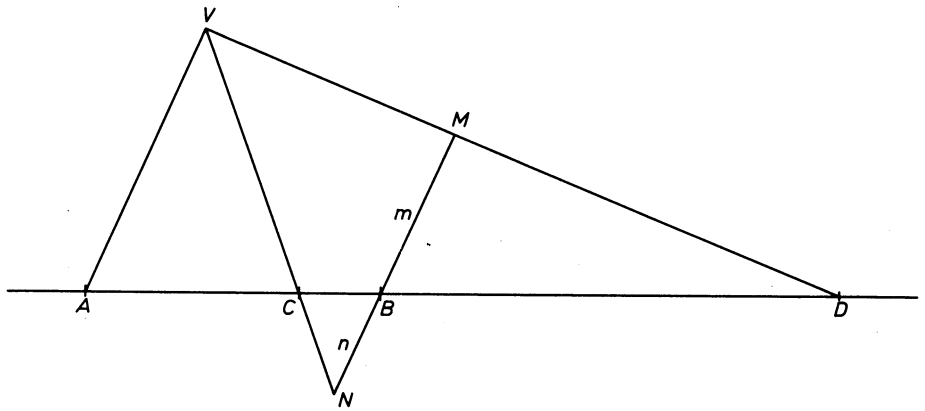


Fig. 6.38

6.405. Interpretación geométrica de las coordenadas afines y proyectivas

Coordenadas afines

Si a_1 es la coordenada de A respecto de la referencia afín (O, U) o bien $R = \{O; \{\overrightarrow{OU}\}\}$ esto significa que $\dfrac{OA}{OU} = a_1$, o sea $(AUO) = a_1$.

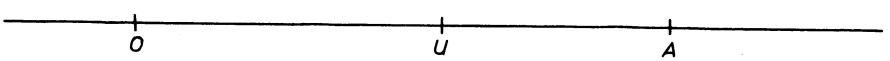


Fig. 6.39

Coordenadas proyectivas

Si A tiene de coordenadas proyectivas $\rho(a_1, 1)$ con relación a la referencia proyectiva (L, O, U), esto significa que $(LOUA) = a_1$.

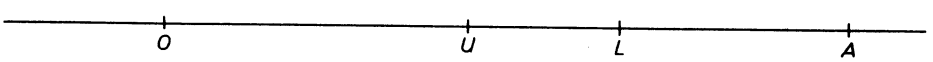


Fig. 6.40

Veamos:

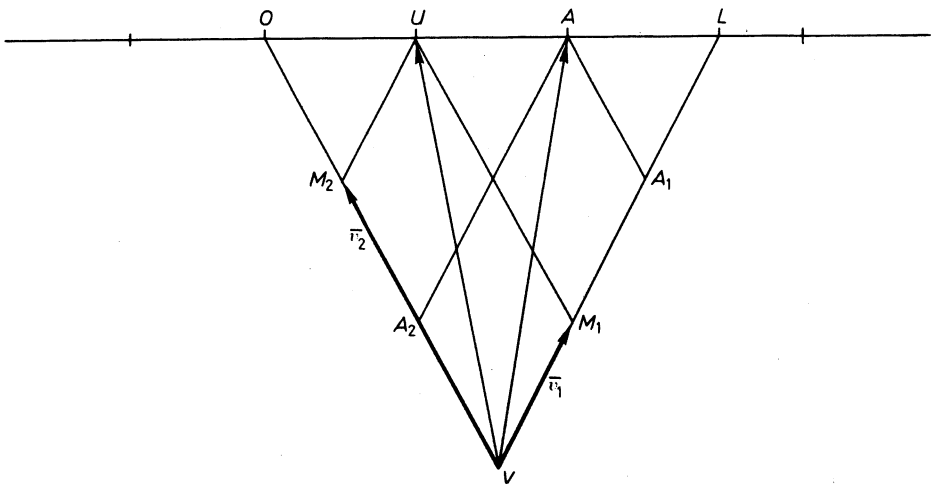


Fig. 6.41

Elegimos el par de vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ tales que $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \{\overrightarrow{VU}\}$.

Además, tomaremos como coordenadas proyectivas de A el par de números (b_1, b_2) componentes del vector $\{\overrightarrow{VA}\}$.

$$\left.\begin{aligned} VA_1 &= b_1 \cdot VM_1 \\ VA_2 &= b_2 \cdot VM_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{VA_1}{VM_1} \cdot \frac{VM_2}{VA_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Ahora bien, por el teorema de Thales, resulta

$$\frac{VA_1}{VM_1} = \frac{OA}{OU}; \quad \frac{VM_2}{VA_2} = \frac{LU}{LA}, \quad \text{luego} \quad \frac{LU \cdot OA}{LA \cdot OU} = \frac{b_1}{b_2} = a_1,$$

pues

$$(b_1, b_2) = b_2\left(\frac{b_1}{b_2}, 1\right)$$

que es de la forma

$$\rho(a_1, 1) \quad \text{para} \quad \rho = b_2, a_1 = \frac{b_1}{b_2}$$

Resumiendo,

$$(LOUA) = a_1, \qquad \text{c.q.d.}$$

Esta interpretación permite dibujar el punto A, conocidas sus coordenadas proyectivas $(b_1\, b_2)$, ya que $(LOUA) = b_1/b_2$ y todo se reduce a dibujar el cuarto punto de una cuaterna, conocida su razón doble, por el método que se ha visto en el apartado anterior.

Recíprocamente, dado el punto A, sus coordenadas proyectivas son $\rho((LOUA), 1)$. Obsérvese que $\lim_{L\to\infty}(LOUA) = \lim_{L\to\infty}\dfrac{LU\cdot OA}{LA\cdot OU} = (AUO)$ o sea, que, si el punto límite es el impropio, $(LOUA)$ se convierte en la coordenada afín.

6.406. Plano proyectivo

Considérese la radiación de rectas de vértice V y un plano afín Π que no pasa por V.

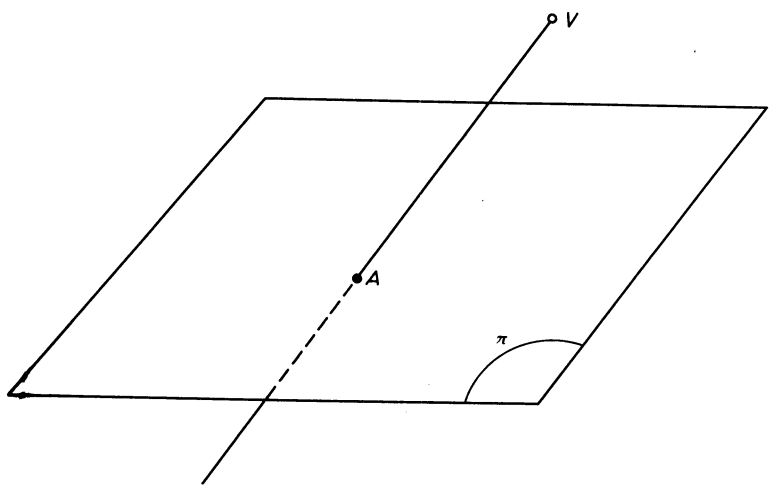


Fig. 6.42

Para que exista una biyección entre los puntos del plano Π y las rectas de la radiación, de tal modo que a cada punto A de Π le corresponda la recta VA, y recíprocamente, se ha de completar el plano Π con nuevos puntos que se definen como *puntos impropios* o *puntos del infinito* y que cabe interpretar como los de intersección del plano Π con las rectas paralelas a Π por V. Esto puede parecer una contradicción, toda vez que una recta y un plano paralelos no tienen puntos comunes. Lo que ocurre es que hemos añadido nuevos puntos, los impropios, para no hacer distinción entre rectas paralelas y no paralelas.

Tomemos en el plano Π la referencia $R = \{O;\ \bar{u}_1\ \bar{u}_2\}$, y en el espacio, $R' = \{V;\ \bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3\}$, tal que $\bar{v}_1 = \bar{u}_1$, $\bar{v}_2 = \bar{u}_2$, $\bar{v}_3 = \{\overrightarrow{VO}\}$.

Un punto A del plano tiene de coordenadas (a_1, a_2) respecto de la referencia $R = \{O;\ \bar{u}_1\ \bar{u}_2\}$, y $(a_1, a_2, 1)$ respecto de $R' = \{V;\ \bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3\}$.

$(a_1, a_2, 1)$ son las componentes de $\{\overrightarrow{VA}\}$ respecto de la base $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

El punto A viene determinado por el vector $\{\overrightarrow{VA}\}$ o cualquiera que tenga su dirección, que será de la forma $\rho\{\overrightarrow{VA}\}$, $\rho \in \mathfrak{R} - \{O\}$.

Por definición, se llama *coordenadas proyectivas* del punto A a las componentes de $\rho\{\overrightarrow{VA}\} = \rho(a_1, a_2, 1) = (\rho a_1, \rho a_2, \rho)$.

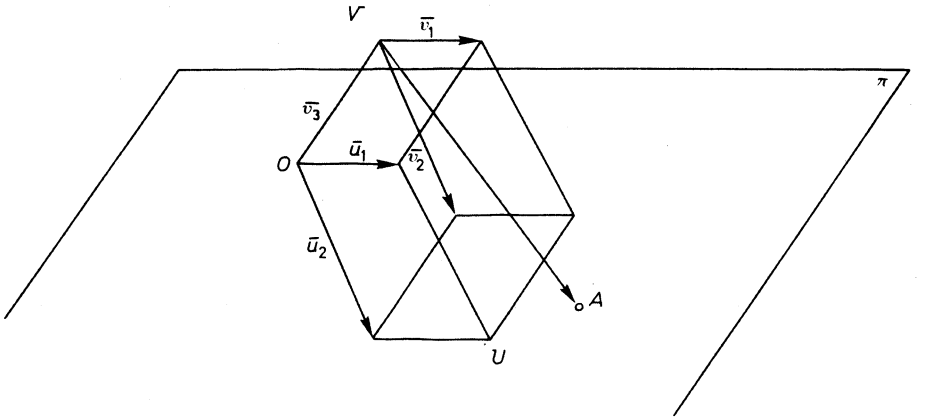


Fig. 6.43

La referencia R' anterior es muy particular. En general vale una referencia $R' = \{V; \bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3\}$ cualquiera, sin que $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ sean paralelos al plano Π.

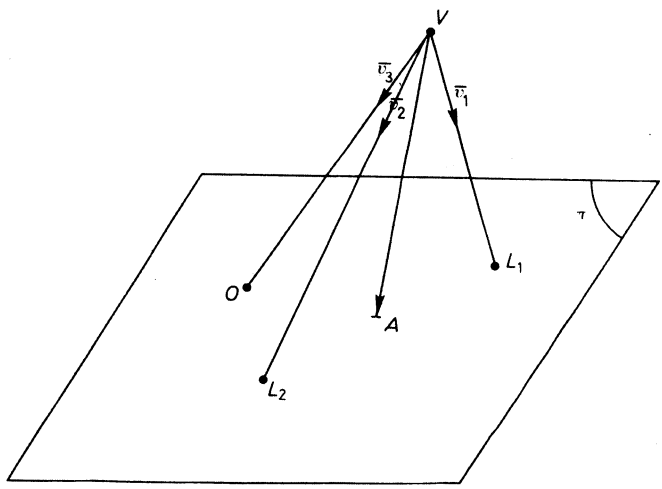


Fig. 6.44

Las coordenadas proyectivas de un punto A son las coordenadas respecto a R' de un vector $\rho\{\overrightarrow{VA}\} = \rho(b_1, b_2, b_3)$, $\rho \in \mathfrak{R} - \{O\}$ de dirección la de la recta VA.

Ocurre que con esta referencia general no existe una relación tan sencilla entre las coordenadas afines y proyectivas.

Si se sustituye $R' = \{V; \bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3\}$ por $R' = \{V; \lambda\bar{v}_1, \lambda\bar{v}_2, \lambda\bar{v}_3\}$, $\lambda \in \mathfrak{R} - \{O\}$, no varían las coordenadas del punto genérico $A = \rho(b_1\ b_2\ b_3)$, pues se convier-

ten en $\rho\left(\frac{b_1}{\lambda}, \frac{b_2}{\lambda}, \frac{b_3}{\lambda}\right) = \frac{\rho}{\lambda}(b_1, b_2, b_3)$, y a estos efectos, como ρ es variable, son las mismas. Las ternas $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ y $(\lambda\bar{v}_1, \lambda\bar{v}_2, \lambda\bar{v}_3)$ son tales que $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$ tiene la misma dirección que $\lambda\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2 + \lambda\bar{v}_3$, la de VU, siendo U el punto de corte con el plano.

La referencia proyectiva es (L_1, L_2, O, U); los puntos L_1 y L_2 se llaman puntos límites, O origen y U unidad.

$$L_1 = \rho(1, 0, 0) \quad L_2 = \rho(0, 1, 0) \quad O = \rho(0, 0, 1) \quad U = \rho(1, 1, 1)$$

6.407. Interpretación geométrica de las coordenadas afines y proyectivas

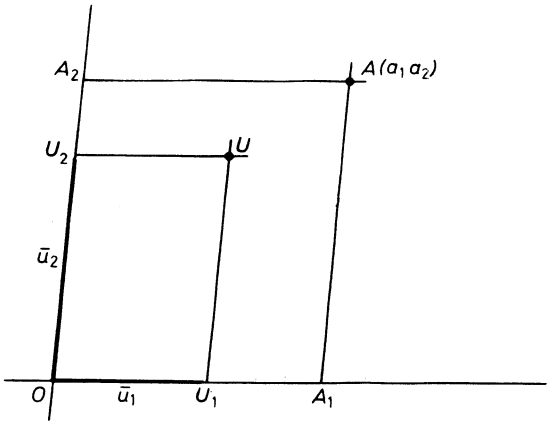


Fig. 6.45

Coordenadas afines

Referencia $R = \{O; \bar{u}\ \ \bar{u}_2\}$

$$a_1 = \frac{OA_1}{OU_1} = (A_1U_1O)$$

$$a_2 = \frac{OA_2}{OU_2} = (A_2U_2O)$$

Coordenadas proyectivas

Referencia (L_1L_2OU)

$A = \rho(a_1, a_2, 1)$

Se demuestra que

$a_1 = (L_1, O, U_1, A_1)$
$a_2 = (L_2, O, U_2, A_2)$

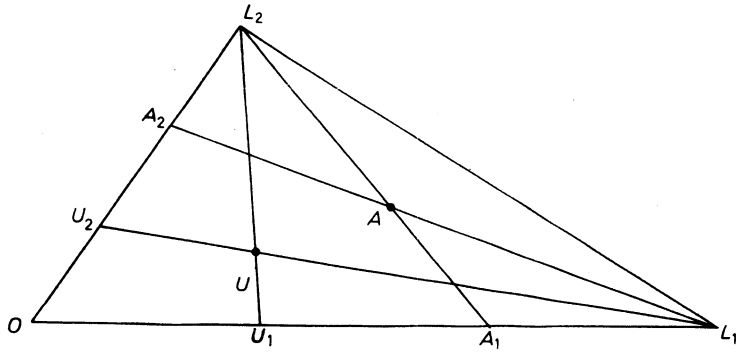


Fig. 6.46

(Prescindimos de la demostración para no alargar la exposición.)*

Si $A = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow a_1 = \dfrac{b_1}{b_3}$ y $a_2 = \dfrac{b_2}{b_3}$.

Se puede apreciar que si L_1 y L_2 se alejan al infinito, a_1 y a_2 coinciden con las coordenadas afines del caso anterior, pues

$$\lim_{L_1 \to \infty} (L_1 O U_1 A_1) = \lim_{L_1 \to \infty} \frac{L_1 U_1 \cdot O A_1}{L_1 A_1 \cdot O U_1} = \frac{O A_1}{O U_1} = (A_1 U_1 O)$$

$$\lim_{L_2 \to \infty} (L_2 O U_2 A_2) = \lim_{L_2 \to \infty} \frac{L_2 U_2 \cdot O A_2}{L_2 A_2 \cdot O U_2} = \frac{O A_2}{O U_2} = (A_2 U_2 O)$$

Esta interpretación permite:

1.º) Dado el punto A, hallar las coordenadas proyectivas

$$((L_1 O\ U_1 A_1),\ (L_2 O\ U_2 A_2),\ 1)$$

2.º) Dadas las coordenadas $A = (b_1\ b_2\ b_3)$, hallar el punto.

$$\text{Basta determinar } A_1 \text{ tal que } (L_1 O\ U_1 A_1) = \frac{b_1}{b_3}$$

$$A_2 \text{ tal que } (L_2 O\ U_2 A_2) = \frac{b_2}{b_3}$$

El punto A es la intersección de las rectas $L_2 A_1$ y $L_1 A_2$.

6.408. Generalización a dimensión ≥ 3

A la recta proyectiva se la llama espacio proyectivo de dimensión 1 y se ha definido a partir del espacio vectorial V_2 de dimensión 2, identificando las rectas vectoriales de V_2 con los puntos de la recta proyectiva.

Al plano proyectivo se le denomina espacio proyectivo de dimensión 2 y se ha definido a partir del espacio vectorial V_3 de dimensión 3, identificando las rectas vectoriales de V_3 con los puntos del plano proyectivo.

El espacio proyectivo que se obtiene añadiendo al espacio afín nuevos puntos, llamados puntos impropios o puntos del infinito, se definiría apoyándose en el espacio vectorial V_4 de dimensión 4. La definición tiene que ser puramente analítica, pues no existe una interpretación física espacial de cuatro dimensiones; se efectúa identificando las rectas vectoriales de V_4 con los puntos del espacio proyectivo.

En general se define el espacio proyectivo de dimensión n a partir del espacio vectorial de dimensión $n + 1$, identificando las rectas vectoriales de V_{n+1} con los puntos del espacio proyectivo de dimensión n.

(NOTA: En todos los casos, excluida la recta vectorial $\bar{0}$.)

* Véase *Introducción al Espacio Proyectivo*. V. Zorío. Gaceta Matemática, 1.ª serie. Tomo XXV, núms. 5-6.

La simple identificación de los puntos del espacio proyectivo con las rectas del espacio vectorial asociado no basta; es necesario definir la dependencia lineal, como se desarrolla en el apartado siguiente.

6.409. Dependencia e independencia lineal

Definamos la dependencia e independencia lineal entre puntos de un espacio proyectivo. Los puntos, según se ha visto, son rectas vectoriales.

Primera definición. Se dice que un punto A depende linealmente de los puntos $A_1\ A_2 \ldots A_n$ si todo vector $\bar{v} \in A$ puede expresarse como una combinación lineal de un conjunto de vectores, uno de cada punto $\bar{v}_1 \in A_1$, $\bar{v}_2 \in A_2, \ldots, \bar{v}_n \in A_n$.

Consecuencia: Basta con que un vector concreto $\bar{v} \in A$ dependa linealmente de un conjunto de vectores, uno de cada punto $A_1\ A_2 \ldots A_n$, para que A dependa de $A_1\ A_2 \ldots A_n$.

En efecto,

$$\bar{v} \in A,\ \bar{v} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{v}_n;$$

luego cualquier otro vector de A será de la forma

$$\lambda \bar{v} = \lambda\lambda_1 \bar{v}_1 + \cdots + \lambda\lambda_n \bar{v}_n = \mu_1 \bar{v}_1 + \cdots + \mu_n \bar{v}_n,$$

siendo

$$\mu_1 = \lambda\lambda_1, \ \ldots, \ \mu_n = \lambda\lambda_n;$$

luego depende linealmente del conjunto $(\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n)$ y, por lo tanto, A depende linealmente de $A_1 \ldots A_n$, c.q.d.

Segunda definición. Se dice que los puntos $A_1 \ldots A_n$ son linealmente dependientes cuando uno de ellos depende linealmente de los restantes.

La anterior definición equivale a que un vector de uno de los puntos depende de un conjunto de vectores, uno de cada uno de los restantes puntos; y esto, al estructurar la dependencia de los espacios vectoriales, se ve que es equivalente a que existe una relación $\lambda_1 \bar{v}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{v}_n = \bar{0}$, donde no todos los coeficientes son nulos, o sea $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Resumiendo:

$(A_1 \ldots A_n)$ linealmente dependientes $\Leftrightarrow$ $(v_1 \ldots v_n)$ linealmente dependientes;

$$\bar{v}_1 \in A_1 \ldots \bar{v}_n \in A_n \Leftrightarrow \lambda_1 \bar{v}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{v}_n = 0,\ (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

En el caso de que no sean linealmente dependientes se dicen *linealmente independientes*:

$(A_1 \ldots A_n)$ linealmente independientes $\Leftrightarrow$ $(\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n)$ linealmente independientes;

$$\bar{v}_1 \in A_1 \ldots \bar{v}_n \in A_n \Leftrightarrow (\lambda_1 \bar{v}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{v}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$$

Como consecuencia de todas las definiciones anteriores son inmediatas las conclusiones siguientes:

a) A depende linealmente de $(A_1 \ldots A_n) \Leftrightarrow A = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$.
b) $(A_1 \ldots A_n)$ linealmente dependiente $\Leftrightarrow \exists(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tal que $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n = 0$.
c) $(A_1 \cdots A_n)$ linealmente independiente $\Leftrightarrow (\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n = 0 \Leftrightarrow \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$.

6.410. Aplicaciones de los anteriores conceptos a casos concretos

I. *Recta proyectiva.* Si estudiamos el caso de la recta proyectiva, n puntos $A_1 \ldots A_n$ son linealmente dependientes, siempre que $n \geq 3$, pues tres o más vectores en el plano vectorial $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n$ son siempre linealmente dependientes.

Dos puntos de la recta A_1, A_2 son linealmente independientes siempre que sean distintos, pues equivale a que dos vectores en el plano son linealmente independientes si no están sobre la misma recta (o rectas paralelas).

Dados tres puntos en la recta $A_1\, A_2\, A$, siempre son linealmente dependientes, o sea que uno de ellos depende de los otros dos.

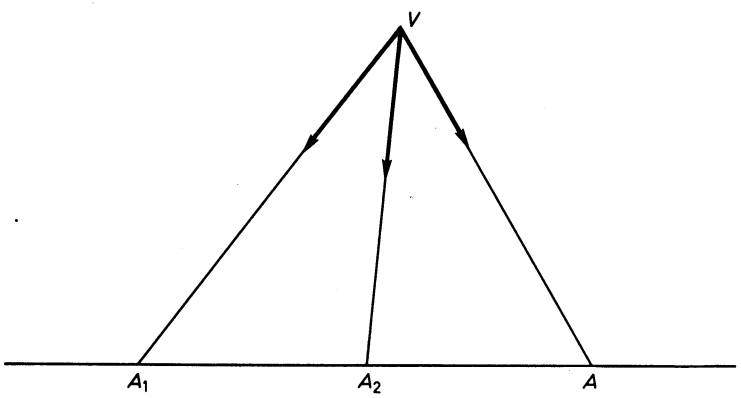


Fig. 6.47

A depende linealmente de $(A_1\, A_2)$, o sea $A = \lambda A_1 + \mu A_2$; $\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$, cualquiera que sea A si $A_1 \neq A_2$.

Si se consideran los puntos de la referencia proyectiva (L, O, U), ya se vio que

$$L = \rho(1, 0); \quad O = \rho(0, 1); \quad U = \rho(1, 1).$$

Si se supone que las coordenadas de A son (a_1, a_2), resulta $A = a_1 L + a_2 O$.

II. *Plano proyectivo.* En el caso del plano proyectivo, el máximo número de puntos linealmente independientes es tres, es decir que $A_1\, A_2 \ldots A_n$ son linealmente dependientes si $n \geq 4$.

Tres puntos distintos y no alineados son siempre linealmente independientes como corresponde a tres vectores del mismo origen en el espacio no situados sobre la misma recta ni sobre un mismo plano.

Dados tres puntos del plano $(A_1\ A_2\ A_3)$ linealmente independientes, cualquier otro punto A depende linealmente de ellos, es decir,

$$A = \lambda A_1 + \mu A_2 + \gamma A_3$$

Si se toman los puntos $(L_1\ L_2 O)$ de la referencia $(L_1\ L_2\ O\ U)$, resulta que λ, μ y γ son las coordenadas de A. Es decir que si $A = (a_1\ a_2\ a_3)$, entonces

$$A = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 O$$

6.411. Variedades lineales proyectivas

Dados n puntos $A_1\ A_2 \ldots A_n$ linealmente independientes, el conjunto de todos los puntos A, tales que $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_n A_n$ forman lo que se llama una *variedad lineal proyectiva de dimensión* $n - 1$.

Cualquier punto A es una variedad lineal proyectiva de dimensión cero, pues $A = \lambda A$.

Las *rectas proyectivas* son variedades lineales de dimensión 1:

$$\{A = a_1 L + a_2 O / a_1,\ a_2 \in \mathfrak{R}\}$$

Los *planos proyectivos* son variedades lineales de dimensión 2:

$$\{A = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 O / a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{R}\}$$

Finalmente vamos a escribir las ecuaciones de las variedades lineales en los espacios de dimensión dos y tres.

En el plano proyectivo

Ecuación de la *recta* AB; $A = (a_1\ a_2\ a_3)$, $B = (b_1\ b_2\ b_3)$.

$$X = \lambda A + \mu B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \rho x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \\ \rho x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0.$$

En el espacio proyectivo

Ecuación del *plano* ABC; $A = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$, $B = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4)$, $C = (c_1\ c_2\ c_3\ c_4)$.

$$X = \lambda A + \mu B + \gamma C \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 + \lambda c_1 \\ \rho x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 + \lambda c_2 \\ \rho x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 + \gamma c_3 \\ \rho x_4 = \lambda a_4 + \mu b_4 + \gamma c_4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ x_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 = 0$$

Ecuación de la *recta* AB; $A = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$, $B = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4)$.

$$X = \lambda A + \mu B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \rho x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \\ \rho x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 \\ \rho x_4 = \lambda a_4 + \mu b_4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|\begin{array}{ccc} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right| = 0 \\ \left|\begin{array}{ccc} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right| = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

o en general como intersección de dos planos con todas las coordenadas

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 = 0 \\ \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 + \delta' x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

6.412. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

6.4120.

Sea la referencia proyectiva $(L\ O\ U)$, tal que O es interior al segmento $\overline{LU}$ y, además, $LO = 1/2\ \overline{OU}$.

Dibújese el punto de coordenadas proyectivas $(-3, 2)$.

6.4121.

Sea la referencia $(L_1\ L_2\ O\ U)$, tal que $(L_1\ L_2\ O)$ forman un triángulo cualquiera y U es su baricentro. Dibújese el punto de coordenadas $(1, -2, 3)$.

6.4122.

Dibújese una referencia en el plano y un punto A arbitrario. Determínense gráficamente las coordenadas proyectivas del punto A.

6.4123.

Demuéstrese que la razón doble de cuatro puntos no puede tomar los valores 0, 1, infinito.

6.4124.

Ecuación de la variedad lineal definida por los puntos

$$A = (1, 2, 7, -1, 3)$$
$$B = (2, 0, -1, +3, 0)$$
$$C = (3, -1, 2, 6, -2)$$

(Naturalmente, en el espacio de cuatro dimensiones.)

6.4125.

Demuéstrese que si cuatro rectas concurrentes se cortan por otra recta, la razón doble de los cuatro puntos obtenidos no varía.

6.5

Geometrías de los espacios afín y euclídeo. Proyectividades

6.51. Introducción

6.52. Afinidades

6.53. Semejanzas

6.54. Congruencias

6.55. Proyectividades

6.56. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

6.5

Geometrías de los espacios afín y euclídeo. Proyectividades

6.51. INTRODUCCION

Se llama *transformación* en un espacio geométrico a una aplicación biyectiva del espacio sobre si mismo.

Modernamente, la Geometría se estudia a partir de los *grupos de transformaciones*. En este caso decimos «grupo» de estructura algebraica de grupo con relación a la ley de composición de transformaciones.

Conviene explicitar más lo que se ha escrito:

¿Cuál es el objeto de la *geometría afín*?

El estudio de las propiedades que son invariantes con relación al grupo de transformaciones que se llaman afinidades o transformaciones afines.

¿Cuál es el objeto de la geometría equiforme o *geometría de las semejanzas*?

El estudio de las propiedades que son invariantes respecto al grupo de transformaciones que se conocen como semejanzas.

¿Cuál es el objeto de la geometría de la congruencia o *geometría de la igualdad*?

El estudio de las propiedades que son invariantes del grupo de transformaciones que recibe el nombre de movimientos o congruencias.

La geometría equiforme y la geometría de la congruencia implican nociones métricas, luego son del espacio euclídeo.

La geometría afín puede ser también una geometría del espacio euclídeo pero no es necesaria esta restricción y se considera sobre un espaciò afín general.

6.52. AFINIDADES

En el plano euclídeo (o en el plano afín general) se llama transformación afín o afinidad a la representada por las ecuaciones

$$\begin{matrix} x'_1 = ax_1 + bx_2 + c \\ x'_2 = dx_1 + ex_2 + f \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$$

Se puede escribir en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Veamos que el producto de dos afinidades es otra afinidad.

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{vmatrix} \neq 0$$

Sustituyendo la segunda en la primera resulta:

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \varphi \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} =$$
$$= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \right]$$

Y basta comprobar que la matriz de los coeficientes de x_1, x_2 es regular, para terminar la demostración. En efecto:

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{vmatrix} \neq 0$$

(Lo anterior es la fórmula de Binet-Cauchy, que dice que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas.)

Las afinidades forman grupo. En efecto:

1. Propiedad asociativa. Se verifica para la composición de todo tipo de transformaciones.
2. Elemento unidad. La identidad

$$\left\{ \begin{matrix} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \end{matrix} \right\}$$

es una afinidad en la que $a = e = 1$; $b = c = d = f = 0$.

3. Elemento inverso.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -c \\ -f \end{pmatrix}$$

que es afinidad, pues

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}^{-1} \right| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^{-1} \neq 0$$

Luego toda afinidad tiene inversa.

Se dice que la figura F es afín de F' cuando existe una afinidad que transforma F en F'. La *relación afín* es una relación de *equivalencia*. En efecto:

1. Reflexiva: F afín F, por ser afinidad la transformación idéntica.
2. Simétrica: F afín $F' \Rightarrow F'$ afín F.

Se ha de demostrar que, si existe una afinidad que transforma F en F', existe otra que transforma F' en F, lo cual es inmediato, pues sirve la afinidad inversa de la primera (que sabemos existe, pues las afinidades forman grupo).

3. Transitiva: F afín $F' \wedge F'$ afín $F'' \Rightarrow F$ afín F''.

Evidente, porque el producto de dos afinidades es una afinidad.

La *relación afín*, por ser de *equivalencia*, determina una clasificación de todas las figuras del plano. Desde el punto de vista de la geometría afín, dos figuras afines, o sea, que pertenecen a la misma clase afín, son indistinguibles por tener las mismas *propiedades afines*. Para entender esto que se acaba de decir, recuérdese que se llaman propiedades afines las que no varían mediante una afinidad, y estas propiedades son el objeto de la geometría afín.

Ejemplo

La afinidad

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{a}{R} x_1 \\ x_2' = \dfrac{b}{R} x_2 \end{cases}$$

transforma la circunferencia

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

en la elipse

$$\frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} = 1$$

Luego ambas figuras son indistinguibles desde el punto de vista de la geometría afín.

Como ejemplo de propiedad afín puede citarse el paralelismo de las rectas

$$\left.\begin{aligned} Ax_1' + Bx_2' + C = 0 \\ A'x_1' + B'x_2' + C' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \quad .$$

En efecto:

mediante la transformación afín

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2 + c \\ x_2' &= dx_1 + ex_2 + f \end{aligned}\right\}$$

se transforman en el par de rectas

$$\begin{aligned} A(ax_1 + bx_2 + c) + B(dx_1 + ex_2 + f) + C = 0 \\ A'(ax_1 + bx_2 + c) + B'(dx_1 + ex_2 + f) + C' = 0 \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} (Aa + Bd)x_1 + (Ab + Be)x_2 + (Ac + Bf + C) = 0 \\ (A'a + B'd)x_1 + (A'b + B'e)x_2 + (A'c + Bf + C') = 0 \end{aligned}$$

y son paralelas puesto que

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{Aa + Bd}{A'a + B'd} = \frac{Ab + Be}{A'b + B'e}$$

6.53. SEMEJANZAS

Vamos a considerar ahora el plano euclídeo, es decir, el plano afín con estructura métrica. Entre las afinidades consideramos las del tipo

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2 + m \\ x_2' &= -bx_1 + ax_2 + n \end{aligned}\right\}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

Estas transformaciones forman grupo. En primer lugar demostremos que este conjunto es cerrado respecto a la composición. En efecto, realicemos la composición de las dos transformaciones:

$$\left.\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$$
$$\left.\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right]$$

La transformación resultante es del mismo tipo, pues

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

1. Propiedad asociativa. Se verifica al componer cualesquiera transformaciones.
2. Elemento unidad. La transformación idéntica también es de este tipo. Se obtiene cuando $a = 1$; $b = m = n = 0$.
3. Elemento inverso.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

Su transformación inversa es

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

que también es una del mismo tipo.

Esta clase de transformaciones se llaman *semejanzas directas* y, como se acaba de ver, forman grupo. El concepto de semejanza es más amplio pues incluye tambien a las transformaciones de la forma

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2 + m \\ x_2' &= bx_1 - ax_2 + n \end{aligned}\right\}$$

que se llaman *semejanzas inversas*.

El producto de dos semejanzas inversas es una semejanza directa como es fácil comprobar.

Análogamente se comprueba que el producto de una semejanza directa y una semejanza inversa es una semejanza inversa.

Las *semejanzas* (directas e inversas) forman grupo del cual es un *subgrupo* el conjunto de semejanzas directas. Las semejanzas inversas, sin embargo, no forman grupo.

Se dice que dos figuras son semejantes cuando existe una transformación de semejanza que transforma una en la otra.

La *relación de semejanza* es una relación de *equivalencia* por análogo razonamiento al que hicimos al hablar de afinidad. Por lo tanto, determina una *clasificación* de las figuras en clases de semejanza. Las figuras que pertenecen a la misma

clase no se distinguen desde el punto de vista de la geometría equiforme (o de la semejanza) puesto que en esta geometría tienen las mismas propiedades. Recuérdese que la geometría equiforme se ocupa sólo de las propiedades que son invariantes para las transformaciones de semejanza.

A continuación conviene demostrar dos propiedades importantes de la transformación por semejanza.

1.ª La transformación por semejanza conserva los ángulos.

Dada la semejanza

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = \quad ax_1 + bx_2 + m \\ x_2' = -bx_1 + ax_2 + n \end{array}\right\},$$

consideremos las dos rectas

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1' + \quad Bx_2' + C = 0 \\ A'x_1' + B'x_2' + C' = 0 \end{array}\right\}$$

que son las transformadas de

$$\left.\begin{array}{l} A(ax_1 + bx_2 + m) + \quad B(-bx_1 + ax_2 + n) + C = 0 \\ A'(ax_1 + bx_2 + m) + B'(-bx_1 + ax_2 + n) + C' = 0 \end{array}\right\}$$

El primer par de rectas forma un ángulo V tal que

$$\operatorname{tg} V = \frac{-\dfrac{A}{B} + \dfrac{A'}{B'}}{1 + \dfrac{AA'}{BB'}} = \frac{A'B - AB'}{AA' + BB'}$$

El segundo par forma un ángulo V_1 tal que

$$\operatorname{tg} V_1 = \frac{(A'a - B'b)\ (Ab + Ba) - (A'b + aB')\ (Aa - Bb)}{(Aa - Bb)\,(A'a - B'b) + \ (Ab + Ba)\,(A'b + B'a)} =$$

$$= \frac{A'B(\cancel{a^2 + b^2}) - B'A(\cancel{a^2 + b^2})}{AA'(\cancel{a^2 + b^2}) + BB'(\cancel{a^2 + b^2})}$$

Luego $V = V_1$, c.q.d.

2.ª La transformación por semejanza conserva la proporcionalidad de distancias.

En efecto:

Sean $M'(x_1', x_2')$, $N'(z_1', z_2')$ los transformados de $M(x_1, x_2)$, $N(z_1, z_2)$.

$$M'N'^2 = (z_1' - x_1')^2 + (z_2' - x_2')^2$$
$$MN^2 = (z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2$$

$$\begin{array}{ll} x_1' = \quad ax_1 + bx_2 + m & z_1' = \quad az_1 + bz_2 + m \\ x_2' = -bx_1 + ax_2 + n & z_1' = -bz_1 + az_2 + n \end{array}$$

$$(z_1' - x_1')^2 = [\, a(z_1 - x_1) + b(z_2 - x_2)]^2 = a^2(z_1 - x_1)^2 + b^2(z_2 - x_2)^2 + \\ + 2ab(z_1 - x_1)\,(z_2 - x_2)$$

$$(z_2' - x_2')^2 = [-b(z_1 - x_1) + a(z_2 - x_2)]^2 = b^2(z_1 - x_1)^2 + a^2(z_2 - x_2)^2 - \\ - 2ab(z_1 - x_1)\,(z_2 - x_2)$$

Sumando miembro a miembro resulta:

$$(z_1' - x_1')^2 + (z_2' - x_2')^2 = (a^2 + b^2)\,[(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2]$$

o sea

$$\overline{M'N'^2} = (a^2 + b^2)\,\overline{MN^2}$$

o bien

$$|\overline{M'N'}| = \sqrt{a^2 + b^2}\,|\overline{MN}|$$

Para otro par de puntos cualesquiera

$$|\overline{P'Q'}| = \sqrt{a^2 + b^2}\,|\overline{PQ}|$$

luego

$$\frac{|\overline{M'N'}|}{|\overline{P'Q'}|} = \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{PQ}|}\,, \qquad \text{c.q.d.}$$

El valor de $\sqrt{a^2 + b^2}$ se denomina *razón de semejanza* y representa la relación de longitudes homólogas entre dos figuras cualesquiera.

Aunque se ha venido razonando con semejanzas directas también se verifica para la semejanza inversa. La diferencia entre ambos tipos de semejanza radica en que la semejanza inversa cambia la orientación de las figuras y la semejanza directa la conserva.

Cuando dos figuras tienen longitudes proporcionales y ángulos iguales, en la geometría elemental se las llama semejantes, lo cual quiere decir que tienen la misma forma aunque el tamaño sea distinto.

El concepto de figura semejante que ha quedado definido según el grupo de transformaciones por semejanza está de acuerdo con el concepto clásico.

6.54. CONGRUENCIAS

Aquellas transformaciones de semejanza para las que se verifica $a^2 + b^2 = 1$ se llaman *congruencias*.

O sea

$$\text{congruencia directa} \begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 + m \\ x_2' = -bx_1 + ax_2 + n \end{cases} \quad a^2 + b^2 = 1$$

$$\text{congruencia inversa} \begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 + m \\ x_2' = bx_1 - ax_2 + n \end{cases} \quad a^2 + b^2 = 1$$

Las congruencias forman *grupo* del cual las congruencias directas constituyen un *subgrupo*.

La demostración es análoga al caso de las semejanzas (véase) añadiendo $A^2 + B^2 = 1$ cuya comprobación es inmediata. (Se aconseja al lector el desarrollo completo.)

Se dice que dos figuras son *congruentes* cuando existe una congruencia que transforma una en la otra. La *relación de congruencia* es de *equivalencia* y, por lo tanto, determina una clasificación en el conjunto de figuras del plano. Las figuras de la misma clase de congruencia son indistinguibles, respecto a la geometría de la congruencia.

Las figuras congruentes son iguales en el sentido de la geometría elemental, es decir, son superponibles, pues la transformación de congruencia, por ser de semejanza, conserva los ángulos, y por ser la razón de semejanza $= \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, conserva las distancias.

Ejercicios

1. La relación de áreas de dos figuras, ¿es una propiedad afín? Demuéstrese.

2. Hállense las ecuaciones de la semejanza que tiene como puntos homólogos

$$\begin{aligned} A(1, 2) &\text{——} A'(2, -1) \\ B(2, 0) &\text{——} B'(3, 1) \end{aligned}$$

3. Estúdiense los tipos de transformación

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 5x_2 + 6 \\ x_2' = -5x_1 + 2x_2 + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - 5 \\ x_2' = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2 + 4 \end{cases}$$

4. Hállese la afinidad que tiene como puntos homólogos

$$\begin{aligned} A(0, 0) &\text{——} A'(1, 0) \\ B(-1, 1) &\text{——} B'(1, 1) \\ C(0, 2) &\text{——} C'(2, 1) \end{aligned}$$

5. La condición de concurrencia de tres rectas, ¿es una propiedad afín? Demuéstrese.

6.55. PROYECTIVIDADES

El plano afín y el plano euclídeo son un mismo conjunto, es decir, están formados por los mismos elementos, los mismos puntos.

La diferencia radica en que al existir una estructura métrica en el plano euclídeo se puede hablar de ángulos y distancias. El plano euclídeo tiene una estructura más rica que el simplemente afín.

El plano proyectivo difiere del plano afín, considerado como conjunto de puntos, en que tiene nuevos elementos; es decir, el plano proyectivo tiene todos los puntos del plano afín y otros más que se llaman impropios y forman una recta (proyectiva, naturalmente).

La transformación lineal que generaliza la afinidad al espacio proyectivo se conoce como *proyectividad.*

$$\left.\begin{array}{l} \rho x_1' = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ \rho x_2' = a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 \\ \rho x_3' = a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

con la condición

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$$

Las proyectividades forman grupo.

Dos figuras se dicen proyectivas cuando existe una proyectividad que transforma una en la otra. La *relación de proyectividad* es de *equivalencia* y, por lo tanto, determina una clasificación de las figuras del plano. Las figuras de la misma clase proyectiva son indistinguibles desde el punto de vista de la geometría proyectiva. (El objeto de la geometría proyectiva es el estudio de aquellas propiedades del espacio proyectivo que son invariantes para las proyectividades.)

Hay un tipo particular de proyectividades que son aquellas que dejan invariante la recta impropia (en general, hiperplano impropio).

Con la referencia habitual de coordenadas, la ecuación de la recta impropia es $x_3 = 0$.

Coordenadas proyectivas *Coordenadas cartesianas*

$$\left.\begin{array}{l} x_1' + ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ x_2' = a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 \\ x_3' = x_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1' = ax_1 + bx_2 + c \\ x_2' = a'x_1 + b'x_2 + c' \end{array}\right\}$$

AFINIDAD ↑

Es decir, las afinidades son *un tipo particular de proyectividades,* son las proyectividades que dejan invariante la recta impropia.

Las afinidades son un subgrupo del grupo de proyectividades.

6.56. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

6.560.
Hállese la ecuación del giro de 45° de centro el origen.

6.561.
Hállese la ecuación de la homotecia de centro el punto $C(3, 2)$ y razón $r = 5$.

6.562.
Determínense las ecuaciones de la simetría respecto de la recta $y = 3x$.

6.563.
Demuéstrese que dos secciones de un cilindro son afines.

6.564.
Justifíquese que la figura afín de un paralelogramo es otro paralelogramo.

6.565.
Hállense los puntos dobles de la proyectividad

$$\begin{aligned} \rho x_1^1 &= 2x_1 + x_2 \\ \rho x_2^1 &= 3x_1 - x_2 + x_3 \\ \rho x_3^1 &= 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

6.566.
Estúdiese en algún caso la descomposición de una semejanza directa en el producto de un giro por una homotecia.

6.567.
Demuéstrese que toda traslación es igual al producto de dos simetrías axiales.

6.568.
Justifíquese que todo giro es igual al producto de dos simetrías axiales.

6.569.
Pruébese que una congruencia directa es igual al producto de un número par de simetrías axiales.

NOTA FINAL. Todo lo que se ha expuesto en este capítulo se generaliza al espacio de dimensión tres (o mayor). Dado el carácter de iniciación del libro, se ha preferido desarrollarlo sólo en dimensión dos para establecer el esquema mental del enfoque moderno de la Geometría. El lector que entienda el presente capítulo comprenderá sin grandes dificultades las geometrías del espacio.

6.6

Estudio de algunas curvas planas. Concepto de curva. Curvatura

6.601. Introducción. Referencia polar

6.602. Ecuación de la recta en coordenadas polares

6.603. Ecuación cartesiana y polar de la circunferencia

6.604. Elipse, hipérbola y parábola

6.605. Ecuación de las cónicas en coordenadas polares

6.606. Secciones de un cono de revolución

6.607. Curvas polinómicas

6.608. Curvas exponencial y logarítmica

6.609. Curvas correspondientes a las funciones hiperbólicas

6.610. Curvas trigonométricas

6.611. Curvas. Definición

6.612. Curvas y gráficas de funciones

6.613. Concepto de curvatura. Centro y radio

6.614. Cálculo de la curvatura. Coordenadas del centro

6.615. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

6.6

Estudio de algunas curvas planas. Concepto de curva. Curvatura

6.601. Introducción. Referencia polar

El estudio de las curvas más sencillas y usuales que se va a efectuar en el presente capítulo se desarrollará en el plano euclídeo, es decir, en el plano afín ordinario en el que existe una estructura métrica, consecuencia de que el espacio vectorial ordinario está dotado de un producto escalar.

En el plano euclídeo se fija una referencia $R = \{O; \bar{u}_1\ \bar{u}_2\}$ tal que, mientras no se diga específicamente lo contrario, la base $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2)$ es ortonormal, o sea $|\bar{u}_1| = |\bar{u}_2| = 1$, $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0$.

La referencia cartesiana R establece una biyección entre los pares de números reales (x, y), y los puntos del plano. Vamos a formalizar otra referencia que se llama *referencia polar*.

Se fija en el plano euclídeo un vector fijo $\overrightarrow{OA}$ y un sentido de giro que, como es habitual, será el contrario al de las agujas del reloj. *Se llama referencia polar* al vector OA y al sentido de giro g (Fig. 6.48).

Cada par de números (ρ, ω) define un punto M tal que $|\overrightarrow{OM}| = \rho|\overrightarrow{OA}|$ y $\widehat{AOM} = \omega$.

Los números (ρ, ω) se llaman *coordenadas polares* del punto M; ρ es el *módulo* y ω el *argumento*.

La referencia polar no establece como la referencia cartesiana una biyección entre los puntos y sus coordenadas, pues a cada par de números (ρ, ω) le corresponde un punto único, pero no recíprocamente; el punto de coordenadas (ρ, ω) también tiene como coordenadas $(\rho, \omega + 2k\pi)$ para $k \in Z$.

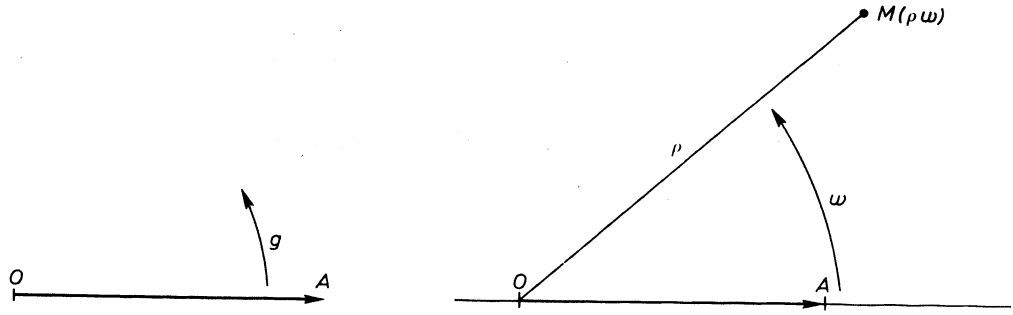


Fig. 6.48

Se acostumbra a tomar como valor de ω el menor de $2\pi : 0 \leq \omega < 2\pi$; e incluso a veces el menor de π en valor absoluto $-\pi < \omega \leq \pi$.

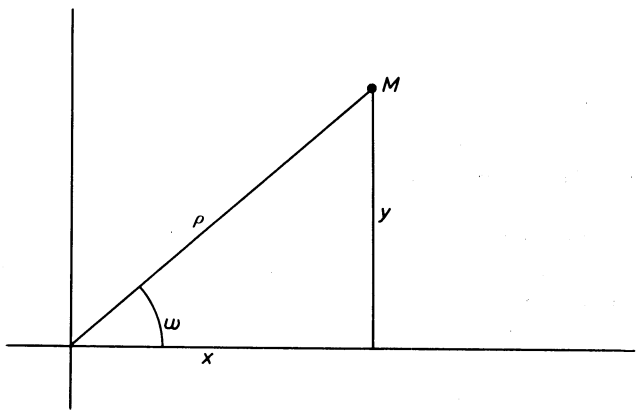


Fig. 6.49

La figura 6.49 permite deducir las fórmulas de paso de coordenadas cartesianas a polares y viceversa.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \cos \omega \\ y = \rho \operatorname{sen} \omega \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \omega = \operatorname{artg} \dfrac{y}{x} \end{array}\right\}$$

6.602. Ecuación de la recta en coordenadas polares

Puesto que en capítulos anteriores se ha estudiado la recta en coordenadas cartesianas, se va a prescindir de este estudio aquí, limitándonos al caso de la ecuación de la recta en coordenadas polares.

a) Si la recta pasa por el polo su ecuación será $\boxed{\omega = \omega_0} = \text{cte.}$

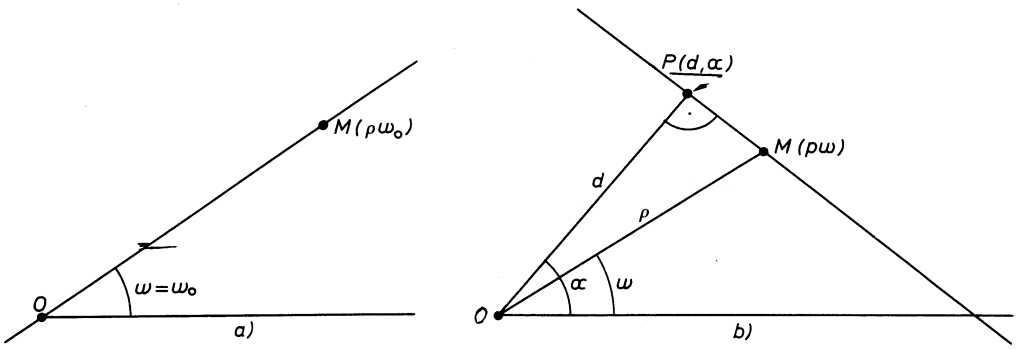


Fig. 6.50

b) Si no pasa por el polo y llamamos d a la distancia del polo a la recta, resultará OM sobre OP

$$d = \rho \cos(\alpha - \omega), \qquad \cos(\alpha - \omega) = \cos(\omega - \alpha)$$

luego

$$\boxed{\rho = \frac{d}{\cos(\omega - \alpha)}}$$

Esta ecuación puede escribirse

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - \alpha)}{d} = \cos\omega \frac{\cos\alpha}{d} + \operatorname{sen}\omega \frac{\operatorname{sen}\alpha}{d}$$

o sea,

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = A\cos\omega + B\operatorname{sen}\omega}$$

Esta última expresión también puede deducirse de la $Ax + By = C$, sustituyendo $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\operatorname{sen}\omega$.

Ejercicio

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos $A(\rho_A\omega_A)$, $B(\rho_B\omega_B)$.

6.603. Ecuación cartesiana y polar de la circunferencia

Recordemos que la circunferencia de centro (x_0y_0) y radio r tiene de ecuación $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$.

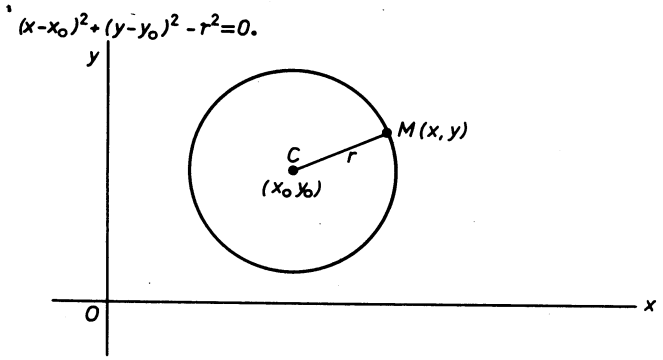


Fig. 6.51

Resultaba de expresar que la distancia MC del centro $C(x_0y_0)$ a un punto genérico $M(x, y)$ es igual al radio $\overline{MC}^2 = r^2$.

Si el centro coincide con el origen de coordenadas $x_0 = y_0 = 0$ y, entonces se reduce a $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

La ecuación de la circunferencia se caracteriza por:

1.º Es de segundo grado.
2.º Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales.

La ecuación $x^2 + y^2 + mx + ny + \rho = 0$ representa una circunferencia cuyos elementos se obtienen al identificar con $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$, o sea con $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$, y resulta $m = -2x_0$, $n = -2y_0$, $p = x_0^2 + y_0^2 - r^2$

Ejercicio

Hállese el centro y radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 3x + 5y - 4 = 0$$

En coordenadas polares

a) Si el centro de la circunferencia coincide con el polo la ecuación será

$$\boxed{\rho = r}$$

b) Si el centro está en el eje polar

$$\rho = 2r \cos \omega$$

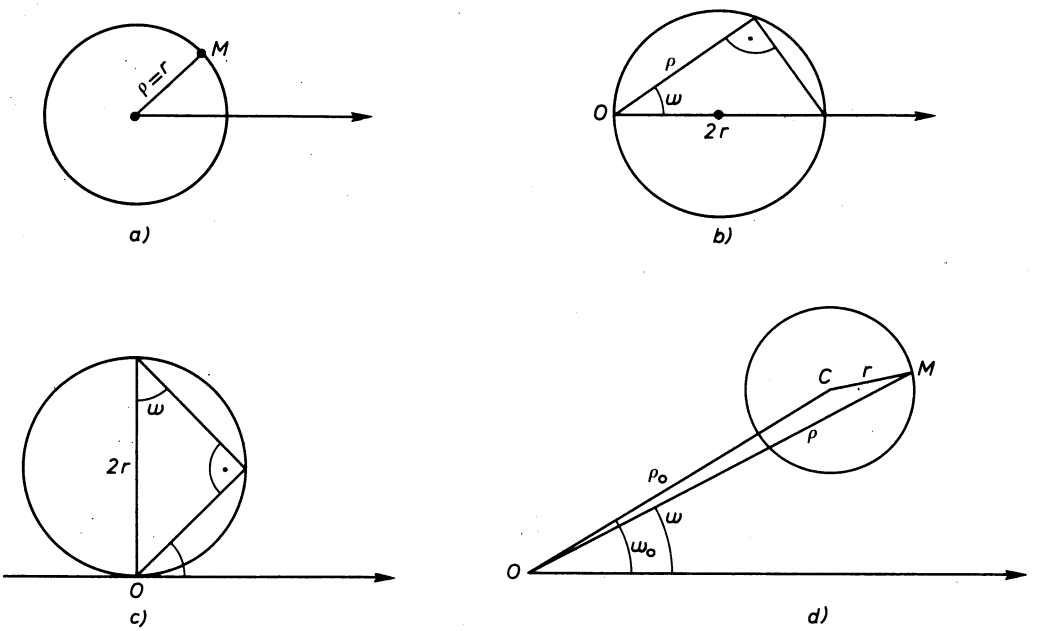


Fig. 6.52

c) Si el centro está en la perpendicular por el polo al eje polar

$$\rho = 2r \operatorname{sen} \omega$$

d) La ecuación en el caso general, con centro cualquiera, tiene mucho menos interés.

En $\widehat{OCM}$, $\overline{MC}^2 = r^2$, o sea

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\,\rho_0 \cos(\omega - \omega_0) = r^2$$

Ejercicios

1) Ecuación de la circunferencia de centro $(3, \pi/2)$ y radio $r = 2$.

2) Ecuación de la circunferencia de centro $(4, 0)$ y que pasa por el polo.

6.604. Elipse, hipérbola y parábola

La definición de estas tres curvas se supone conocida. Sus ecuaciones más sencillas resultan cuando los ejes cartesianos se toman coincidiendo con los ejes de simetría (Fig. 6.53).

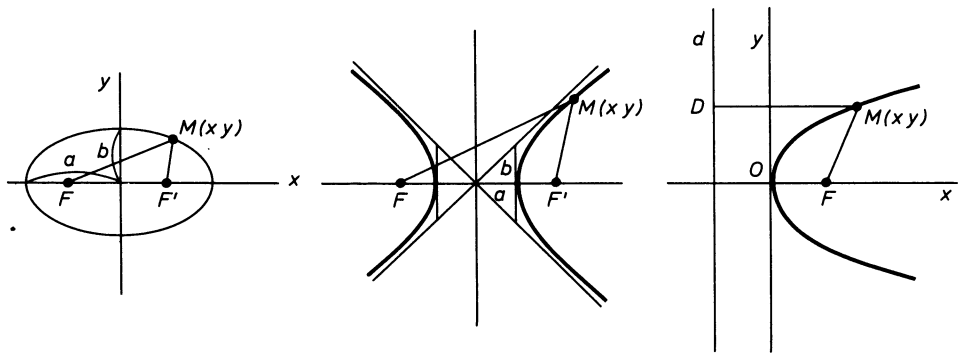


Fig. 6.53

a) $F(-c, o)$ $F'(c, o)$

$$MF + MF' = 2a; \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

Operando resulta

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

b) $F = (-c, o)$ $F' = (c, o)$

$$MF - MF' = 2a; \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

Operando queda

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

c) $F = (p/2, o)$

$$MF = MD; \quad \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = x + p/2$$

Operando queda

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Las tres curvas anteriores reciben el nombre de *cónicas* por razones que se desarrollarán en el apartado siguiente.

Hay una propiedad muy importante que puede servir para definir las tres cónicas.

Si se fija un punto F y una recta d, llamados respectivamente foco y directriz, el lugar de los puntos cuya relación de distancia al foco y a la directriz es constante se llama *cónica*. Es decir, es el lugar de los puntos M tales que

$$\frac{MF}{MD} = e = \text{constante}$$

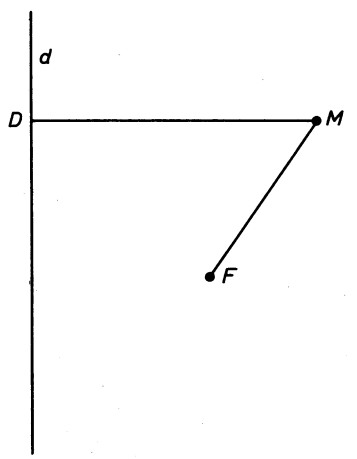


Fig. 6.54

Según los valores de la constante, se tendrá una elipse, hipérbola o parábola. Si $e = 1$, ya se vio que correspondía a parábola, por definición de la misma. Veamos en los restantes casos.

Elipse. $MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} =$

$$= \sqrt{x^2 + c^2 - 2cx + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - cx)^2} = \frac{a^2 - cx}{a}$$

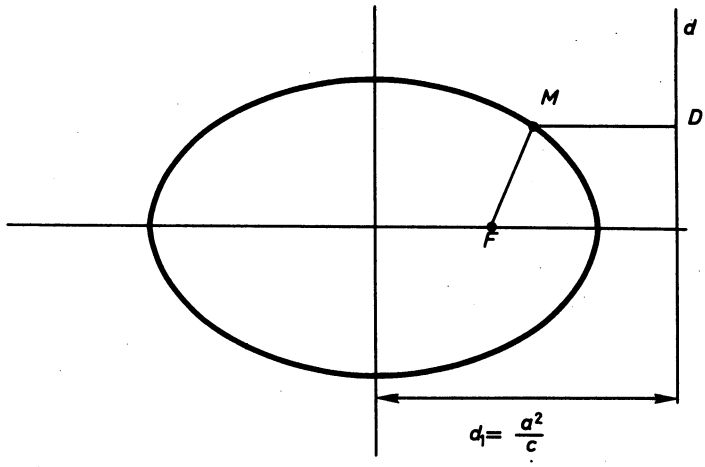


Fig. 6.55

$$MD = d_1 - x = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a^2 - cx}{c}$$

$$\frac{MF}{MD} = \frac{a}{\frac{a^2 - cx}{c}} = \frac{c}{a} = \text{cte}$$

Es decir, que si se considera la recta paralela al eje y a la distancia $d_1 = \frac{a^2}{c}$, la elipse es el lugar de puntos M, tales que $\frac{MF}{MD} = \frac{c}{a} = e$.

El valor de $\frac{c}{a}$ se llama *excentricidad* de la elipse y, según se sabe, es menor que 1, pues $c < a$.

Hipérbola. Procede el mismo razonamiento. En este caso $\frac{MF}{MD} = \frac{c}{a} = e > 1$, pues en la hipérbola $c > a$.

Tanto en la elipse como en la hipérbola y parábola se llama *parámetro* la ordenada de la x del foco.

Elipse $\quad x = c \Rightarrow y^2 = b^2\left[1 - \frac{c^2}{a^2}\right] = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a} = \text{parámetro}$

Hipérbola $\quad x = c \Rightarrow y^2 = b^2\left[\frac{a^2}{a^2} - 1\right] = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a} = \text{parámetro}$

Parábola $\quad x = p/2 \Rightarrow y^2 = 2p.\ p/2 = p^2 \Rightarrow y = p/2 = \text{parámetro}$

6.605. Ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares

Solamente tiene interés el caso en que el polo coincide con uno de los focos, y el eje polar con el eje mayor.

$$a)\quad \frac{MF}{MD} = \frac{c}{a},\quad MF = \rho,\quad MD = \frac{a^2}{c} - c - \rho\cos\omega = \frac{b^2}{a} - \rho\cos\omega$$

$$\frac{MF}{MD} = \frac{c}{a} = \frac{\rho}{\frac{b^2}{c} - \rho\cos\omega} \Rightarrow \rho = \frac{b^2}{a} - \rho\frac{c}{a}\cos\omega \Rightarrow \rho\left(1 + \frac{c}{a}\cos\omega\right) = \frac{b^2}{a}$$

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\omega} = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$$

donde p es el parámetro y e la excentricidad.

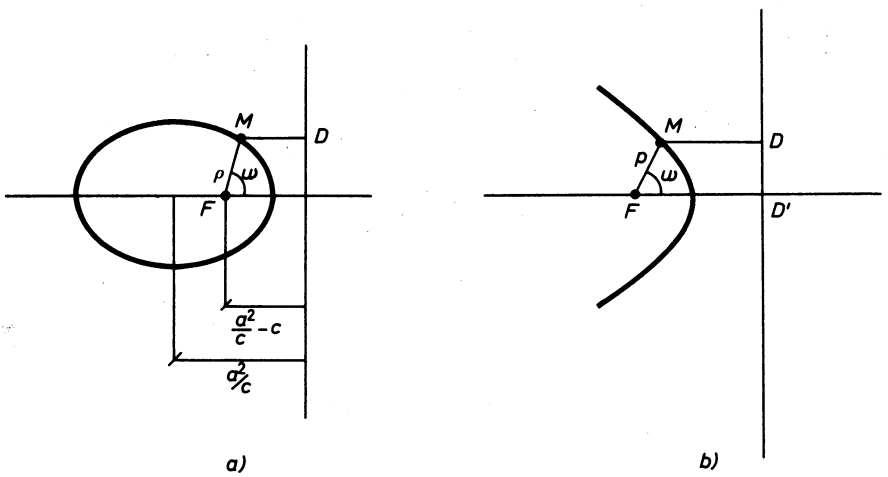


Fig. 6.56

b) Para la hipérbola, el mismo razonamiento; se obtiene la misma ecuación con la diferencia de que $e > 1$ en vez de $e < 1$.

c) Para la parábola resulta $\rho = \dfrac{p}{1 + \cos\omega}$, es decir, la misma ecuación con $e = 1$, como se deduce de la gráfica *b*) de la figura 6.56.

$$FD' = p = \rho\cos\omega + \rho$$

Resumiendo: La ecuación de una cónica en coordenadas polares cuando el polo coincide con el foco y el eje polar con el eje de simetría de la cónica es

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega}$$

donde

p = parámetro (ordenada de la x_F)
e = excentricidad

Esta ecuación representa:

Elipse si $e < 1$
Hipérbola si $e > 1$
Parábola si $e = 1$

6.606. Secciones de un cono de revolución

Si un cono de revolución, cuyo semiángulo cónico representamos por α, es cortado por un plano, su intersección será una cónica.

1.º Si el plano corta sólo a una hoja del cono la sección será una elipse.

2.º Si el plano es paralelo a una generatriz del cono la intersección será una parábola, que es un caso límite de la elipse.

3.º Si el plano corta a las dos hojas del cono su intersección será una hipérbola.

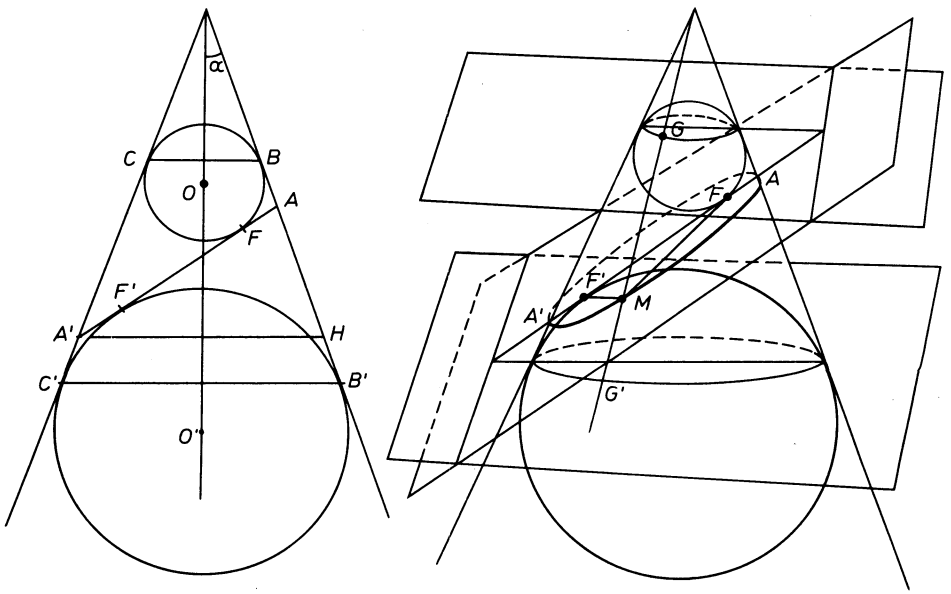


Fig. 6.57

En la derecha de la figura 6.57 puede verse un plano que corta a una hoja de un cono. Demostremos que la intersección es una elipse de focos F y F', que son los puntos de tangencia de las esferas inscritas.

$$\left.\begin{matrix} MF = MG \\ MF' = MG' \end{matrix}\right\} \text{ por ser tangentes desde el punto } M \text{ a la misma esfera}$$

$$MF + MF' = MG + MG' = GG' = CC'$$

Ahora bien, $CC' = A'C' + A'C = A'F' + A'F = AF + A'F = AA'$
luego

$$\boxed{MF + MF' = AA'}$$

o sea, el lugar del punto M es una elipse de focos F y F', y eje mayor AA'.

En la izquierda de la figura 6.57 se dibuja la sección por el plano que pasa por el eje del cono y es perpendicular al plano de la sección

$$AA' = CC' = BB'$$

$$FF' = AA' - AF - A'F' = BB' - AB - HB' = AH$$

Para situar una elipse en un cono dado, basta construir un triángulo $AA'H$ del que se conoce

$$\begin{aligned} AA' &= 2a, \text{ eje mayor de la elipse,} \\ AH &= 2c, \text{ distancia focal de la elipse,} \\ \widehat{AHA'} &= \frac{\pi}{2} - \alpha = \text{complemento del semiángulo cónico.} \end{aligned}$$

El problema siempre tiene solución, pues se trata de construir un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Construido el anterior triángulo, queda determinado el ángulo que el plano de la sección ha de formar con el eje del cono para que la sección sea la elipse dada.

Análogamente se demuestran los otros casos de sección hipérbola y parábola, que no se desarrollan en favor de una extensión adecuada.

6.607. Curvas polinómicas

Se llaman curvas polinómicas aquellas cuya ecuación es un polinomio. Es costumbre llamarlas también curvas *parabólicas* como generalización de la parábola de segundo grado. Así, resulta

$y = a_0x^2 + a_1x + a_2$, parábola de segundo grado
$y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, parábola de tercer grado
$y = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, parábola de cuarto grado
. . . . . .
$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, parábola de grado enésimo

— Una recta $y = k$, paralela al eje x, corta a la parábola de grado n en n puntos. Las abscisas de estos n puntos se obtienen resolviendo la ecuación de grado n

$$k = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

La ecuación tiene n raíces que pueden ser reales o imaginarias. Sabemos que siempre que tenga una raíz imaginaria tendrá su conjugada, y que algunas raíces pueden coincidir (raíces múltiples).

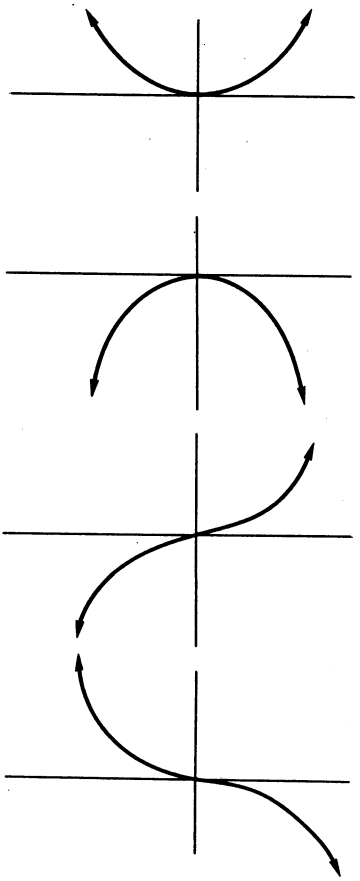
— Al estudiar la continuidad se vio que toda curva polinómica del tipo anterior era una función continua.

– Para $x \to \infty$, las funciones polinómicas son infinitos equivalentes al término de mayor grado.

En efecto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{a_0x^n} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right) = 1$$

Luego el comportamiento para x infinitamente grande es análogo al de a_0x^n. Por ello basta estudiar $y = a_0x^n$ para conocer la posición en el infinito. La curva $y = a_0x^n$ es de la forma



1.º) *n par*

$a_0 > 0$ $\begin{cases} x \to +\infty & y \to +\infty \\ x \to -\infty & y \to +\infty \end{cases}$

$a_0 < 0$ $\begin{cases} x \to +\infty & y \to -\infty \\ x \to -\infty & y \to -\infty \end{cases}$

2.º) *n impar*

$a_0 > 0$ $\begin{cases} x \to +\infty & y \to +\infty \\ x \to -\infty & y \to -\infty \end{cases}$

$a_0 < 0$ $\begin{cases} x \to +\infty & y \to -\infty \\ x \to -\infty & y \to +\infty \end{cases}$

Fig. 6.58

Si $y = a_0x^n$, $n \geq 2$ la y tiende a ∞ más rápidamente que la x por ser la y un infinito de orden $n \geq 2$, y la x un infinito de orden 1; por ello decimos que la curva tiene en el infinito una *rama parabólica* de dirección y.

En el caso de $y^2 = ax$ la rama sería parabólica de dirección x, pues la x tiende a ∞ más rápidamente que la y.

Forma de la gráfica de $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

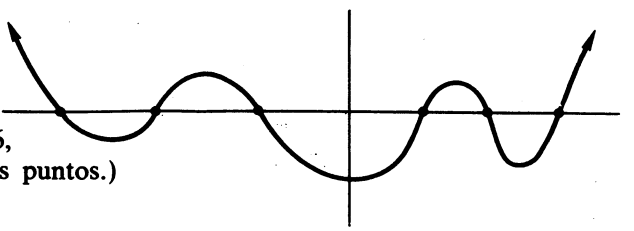
Es fácil dibujarla sabiendo lo siguiente:

1.º Es continua.
2.º Corta al eje x en n puntos reales o imaginarios (por pares conjugados).
3.º Posición para $x \to \infty$.

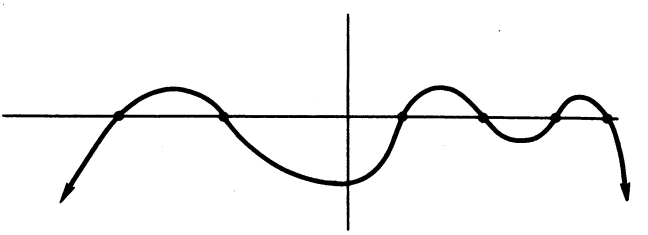
Veamos distintos casos, suponiendo que los puntos de corte con el eje x son reales y distintos.

n par, $a_0 > 0$

(Esta dibujada para $n = 6$, pues corta al eje x en seis puntos.)

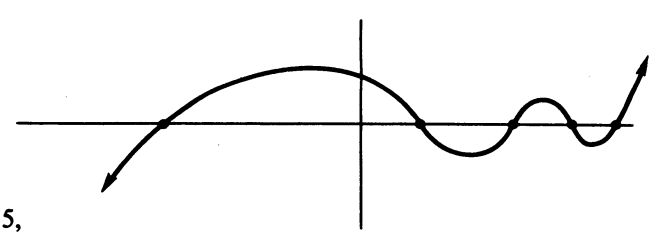


n par, $a_0 < 0$



n impar, $a_0 > 0$

(Está dibujada para $n = 5$, pues corta el eje x en cinco puntos.)



n impar, $a_0 < 0$

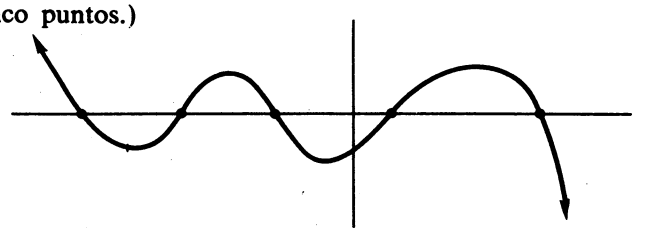


Fig. 6.59

Para completar el dibujo se hallan, si se puede (al menos aproximadamente), los máximos y mínimos, las inflexiones y las tangentes en los puntos de corte con los ejes. Además, siempre es aconsejable un cuadro de valores.

Ejercicios

1) Dibújese $y = (x - 1)^2(x + 2)(-x + 5)$.
2) Dibújese una curva de sexto grado que tenga una raíz doble, y dos imaginarias conjugadas.
3) Dibújese una curva de cuarto grado que tenga una raíz triple.

6.608. Curvas exponencial y logarítmica

Estas curvas son las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica. Estas funciones requerirían un estudio muy completo del cual prescindimos para limitarnos únicamente a recordar sus gráficas*.

La *función exponencial* es $y = a^x$, $a > 0$ (Fig. 6.60).

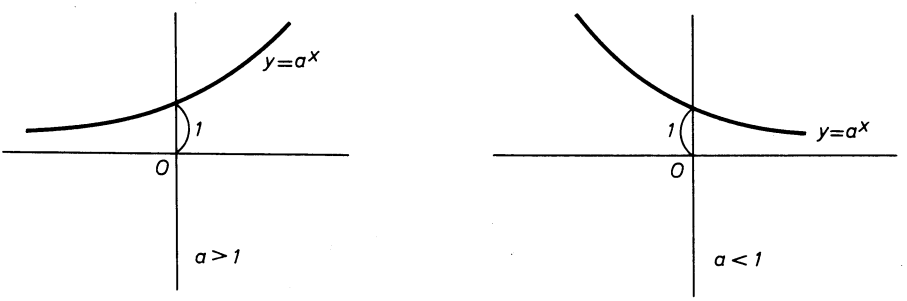


Fig. 6.60

Conocida la función exponencial con una base cualquiera es inmediato determinarla con otra base (Fig. 6.61). En efecto, si conocemos la exponencial $y = e^x$, vamos a determinar $y = a^x$.

$$\frac{PQ_1}{PQ} = \frac{1}{La} \Rightarrow PQ_1 = \frac{PQ}{La}$$

Para construir la curva a^x basta trazar paralelas al eje x que cortarán a e^x en puntos Q; llevando $PQ_1 = \dfrac{PQ}{La}$, se obtienen puntos de a^x.

* Un estudio muy completo de la función exponencial y logarítmica puede verse en *Elementos de Matemática*, del profesor Abellanas. Un estudio muy didáctico y, tal vez, más asequible puede encontrarse en el capítulo 3 de *Cálculus*, de Apóstol.

$y = e^x$
$y = a^x = e^{xLa}$

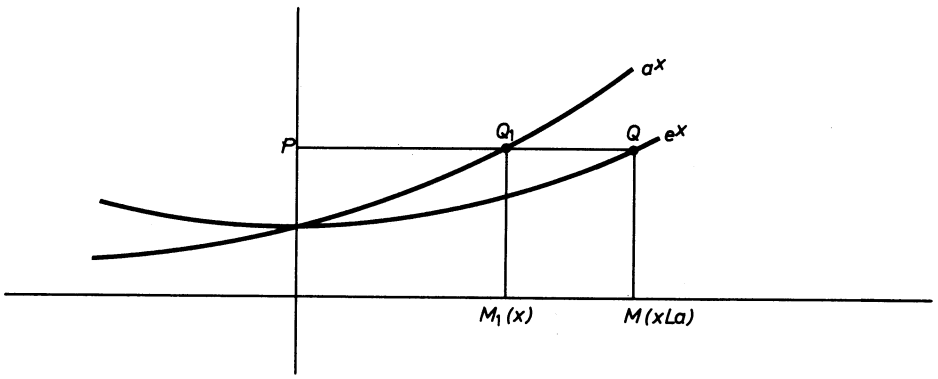


Fig. 6.61

La *función logarítmica* es la inversa de la función exponencial

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Como a la variable independiente se acostumbra a llamarla x, resulta $y = \log_a x$, que será simétrica, respecto a la primera bisectriz, de la función exponencial (Fig. 6.62).

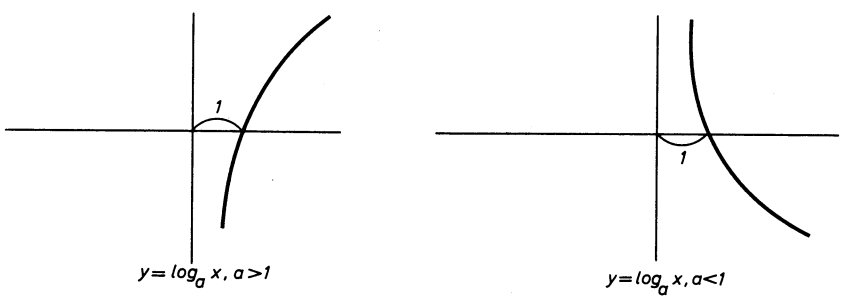


Fig. 6.62

Conocida una gráfica logarítmica, por ejemplo, los logaritmos neperianos, se puede construir otra gráfica, por ejemplo, $y = \log_a x$.

$$\log_a x = \frac{Lx}{La} \qquad PQ_1 = \frac{PQ}{La}$$

Basta trazar paralelas al eje y que cortarán a Lx en puntos Q, y llevar $PQ_1 = \dfrac{PQ}{La}$ determinando los puntos Q_1 de $\log_a x$ (Fig. 6.63).

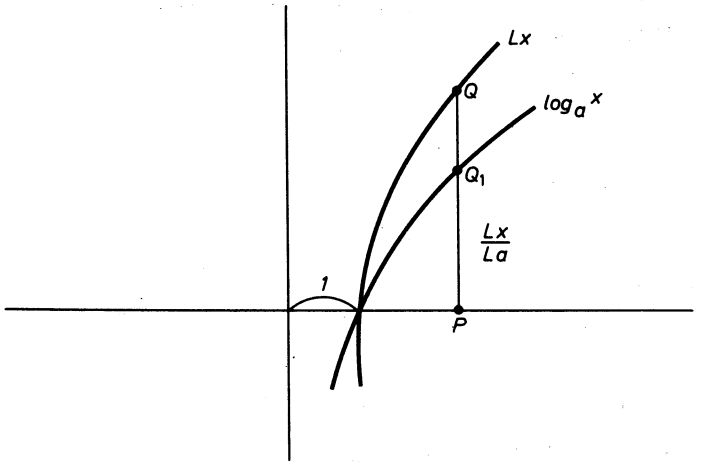


Fig. 6.63

6.609. Curvas correspondientes a las funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas están en estrecha relación con la función exponencial $y = e^x$.

Coseno hiperbólico

$$y = \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$PQ_1 = \frac{PQ + PQ'}{2}$$

Q_1 = punto medio de QQ'

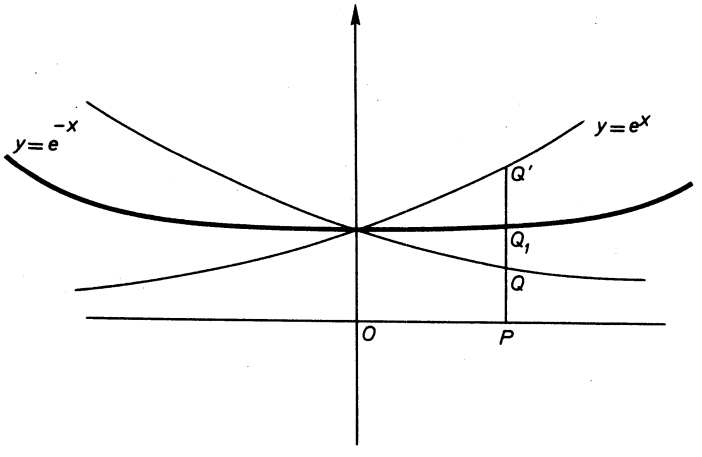


Fig. 6.64

Seno hiperbólico

Restando gráficamente los puntos $y = e^x$, $y = e^{-x}$ obtenemos la de trazo a rayas $y = e^x - e^{-x}$.

A partir de la curva de trazos obtenemos Sh x tomando para cada x la mitad de la ordenada.

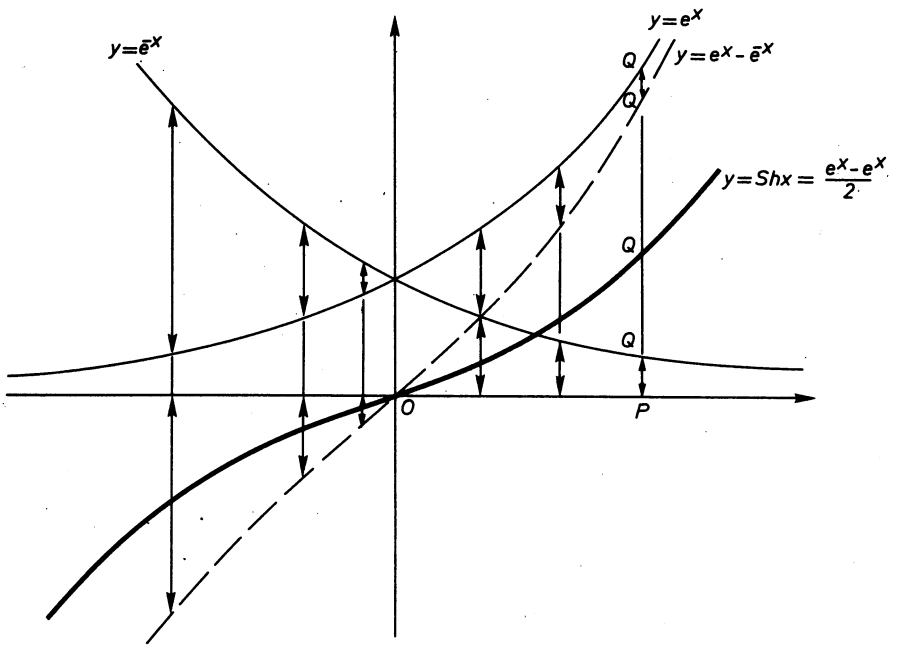


Fig. 6.65

$$Q'Q'' = PQ;\ PQ'' = PQ' - PQ;\ PQ_1 = \frac{PQ' - PQ}{2} = \frac{PQ''}{2}$$

Tangente hiperbólica

$$y = \text{Th}\, x = \frac{\text{Sh}\, x}{\text{Ch}\, x}$$

Basta dividir gráficamente el Sh x y Ch x que ya hemos dibujado.

También se puede dibujar a partir de $y = \text{Th}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, que se ve es simétrica respecto al origen, con asíntotas $y = \pm 1$ y pasa por (0, 0); además es creciente en todo punto.

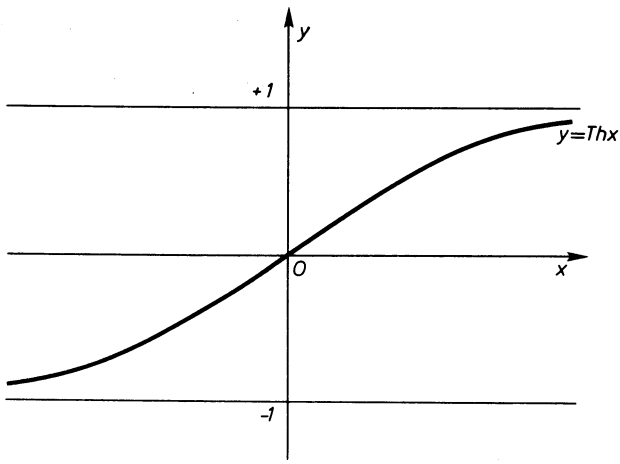


Fig. 6.66

Las tres funciones hiperbólicas que siguen son las inversas de las anteriores.

Secante hiperbólica

$$y = \text{Sech } x = \frac{1}{\text{Ch } x}$$

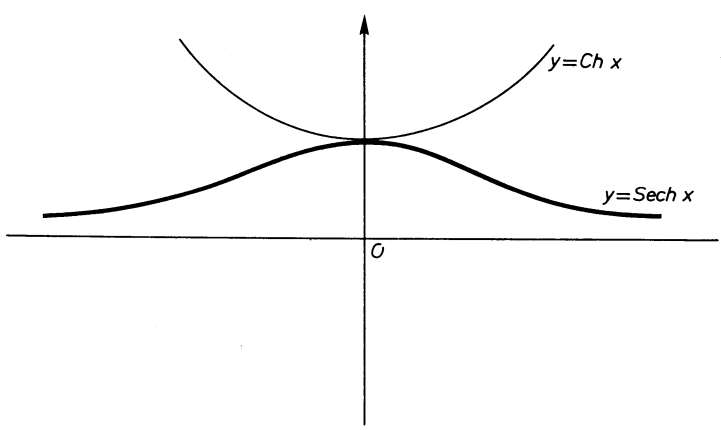


Fig. 6.67

Cosecante hiperbólica

$$y = \text{Cosech } x = \frac{1}{\text{Sh } x}$$

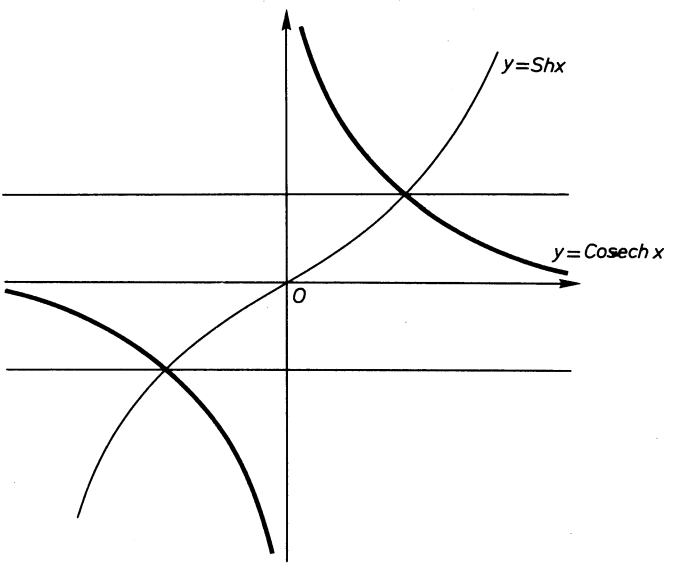


Fig. 6.68

Cotangente hiperbólica

$$y = \text{Cth } x = \frac{1}{\text{Th } x}$$

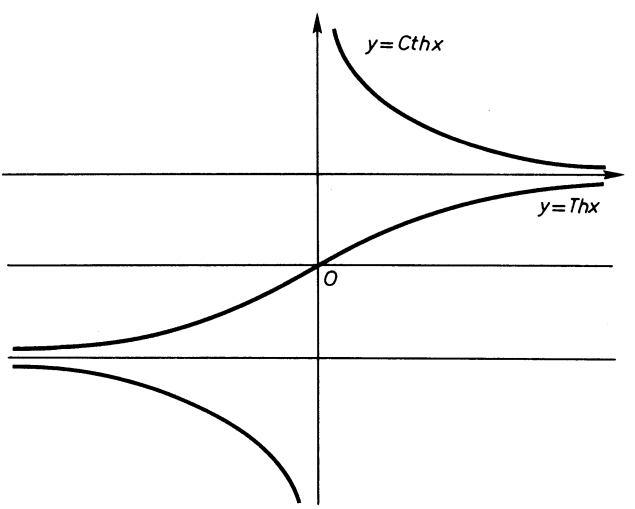


Fig. 6.69

6.610. Curvas trigonométricas

Vamos a recordar las gráficas de las funciones trigonométricas para completar el estudio de las curvas elementales.

$$y = \operatorname{sen} x$$

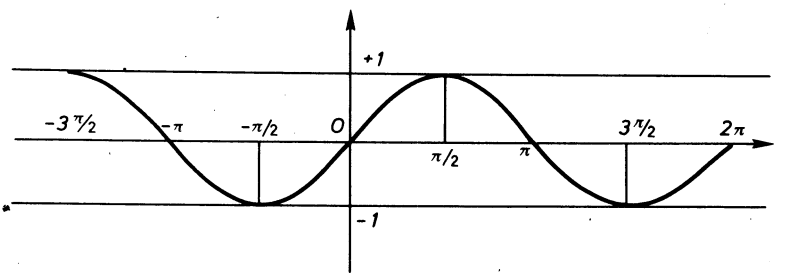


Fig. 6.70

$$y = \cos x$$

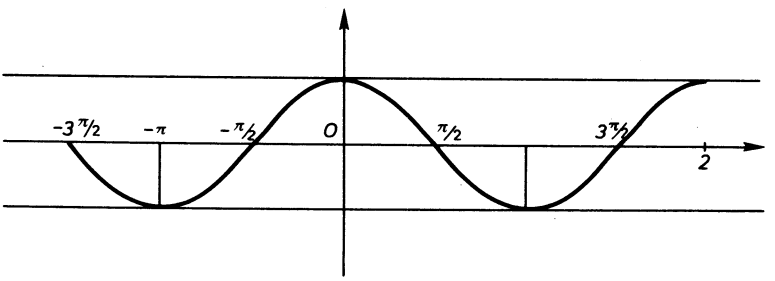


Fig. 6.71

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

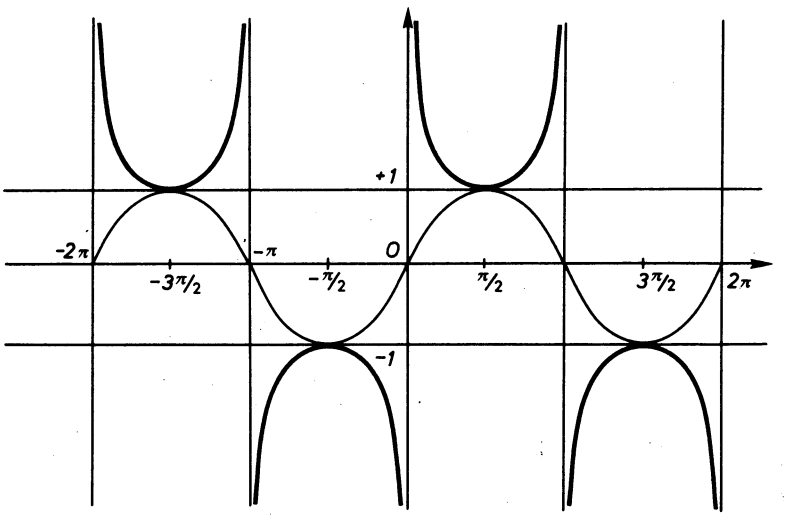


Fig. 6.72

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

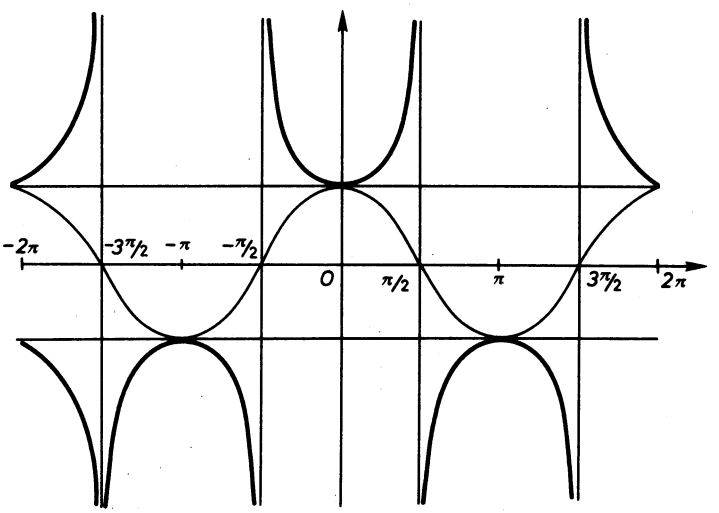


Fig. 6.73

$$y = \operatorname{tg} x$$

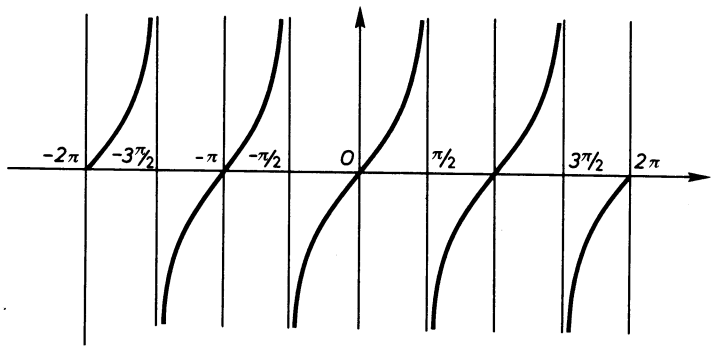


Fig. 6.74

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

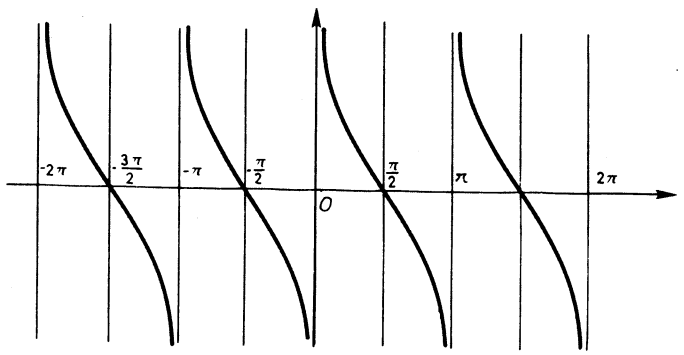


Fig. 6.75

6.611. Curvas. Definición

Se pretende en este epígrafe dar precisión al concepto de curva del que hasta ahora se tiene una idea intuitiva. Son curvas todas las que se acaban de estudiar.

Para entender el concepto de curvas es conveniente recurrir al concepto físico de trayectoria de un punto móvil (Fig. 6.75).

Supóngase que en un instante t_1 un punto móvil ocupa la posición M_1, y que se mueve hasta ocupar la posición M_2 en un instante t_2.

Durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ ha recorrido la trayectoria M_1M_2. En cada instante t del intervalo $[t_1, t_2]$ ha ocupado una posición intermedia. Se dice que el movimiento del punto móvil está definido si se conoce en cada instante «t» la posición que ocupa.

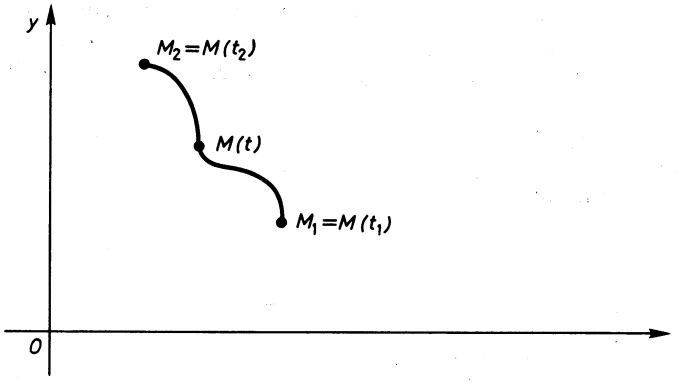


Fig. 6.76

Ahora bien, la posición de un punto viene determinada por sus coordenadas (x, y), luego cada movimiento estará determinado si se conocen en cada instante «t» las (x, y), es decir, si x e y son ciertas funciones conocidas de t

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}, \text{ para } t \in [t_1\ t_2]$$

El intervalo de tiempo $[t_1\ t_2]$ es un intervalo de la recta real o sea un segmento.

La trayectoria es la imagen de una aplicación del segmento de recta $[t_1\ t_2]$ en el plano euclídeo E_2, pues a cada $t \in [t_1\ t_2]$ corresponde un punto único de coordenadas $(\varphi(t), \psi(t))$. Pero es más; esta aplicación es continua, en el sentido de que a dos puntos t', t'' muy próximos de $[t_1\ t_2]$ corresponden dos posiciones M', M'' muy próximas de la trayectoria.

Lo esencial del concepto de curva es que es una *aplicación* de un segmento de recta en el plano; y que esta aplicación es continua.

Sin embargo, una aplicación continua de un segmento en E_2 puede no representar una «curva» de acuerdo con la noción intuitiva que se tiene de este término.

Peano demostró que existen aplicaciones continuas de un segmento de recta en el plano, que pasan por todos los puntos de un cierto rectángulo, es decir, que tienen un área. Esto está en contradicción con lo que se entiende vulgarmente por curva. Es necesario establecer la condición de regularidad (total o a trozos), como se verá a continuación.

Continuemos con el estudio de la trayectoria de un móvil.

En el movimiento de un vehículo no se producen giros bruscos en la trayectoria, luego las funciones que la definen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, además de ser continuas tienen derivada continua.

Una curva se dice que es *regular* cuando la aplicación es derivable o sea $(\varphi(t), \psi(t))$ son derivables; o lo que es lo mismo, *cuando la tangente a la curva varía con continuidad.*

Si la aplicación es derivable excepto en un número finito de puntos de $[t_1, t_2]$ se dice que es *regular a trozos.* Cada uno de los trozos en los que es regular se llama *arco de curva.*

Puede decirse que las curvas o son regulares o son regulares a trozos, es decir, compuestas por arcos de curva y sus puntos de acumulación.

Vamos a seguir estudiando los tipos de curvas, recurriendo al modelo del móvil.

Puede suceder que en su trayectoria el móvil no vuelva a pasar por puntos que ya pasó, es decir que la aplicación sea inyectiva. En este caso la curva se dice *simple*.

Si los puntos inicial y final no coinciden o sea $M_1 \neq M_2$, se llama *curva no cerrada*.

Si la trayectoria cierra un circuito, es decir, si la posición final coincide con la inicial, $M_1 \equiv M_2$, la curva se llama *cerrada*.

Por lo tanto, se tienen los siguientes casos:

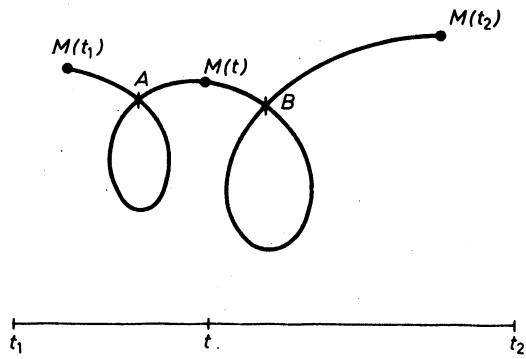


Fig. 6.77

Curva general no cerrada

$$[t_1\ t_2] \longrightarrow E_2$$
$$t \longrightarrow M(t)$$

aplicación *no* inyectiva

$$\left.\begin{matrix} t'_A \longrightarrow A \\ t''_A \longrightarrow A \end{matrix}\right\} t'_A \neq t''_A$$

$$\left.\begin{matrix} t'_B \longrightarrow B \\ t''_B \longrightarrow B \end{matrix}\right\} t'_B \neq t''_B$$

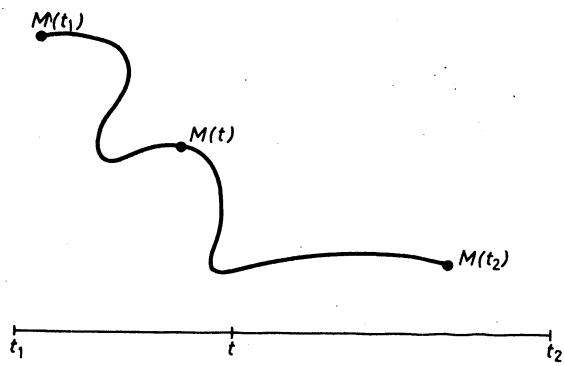


Fig. 6.78

Curva simple no cerrada

$$[t_1\ t_2] \longrightarrow E_2$$
$$t \longrightarrow M(t)$$

aplicación inyectiva

o sea, $M(t') = M(t'') \Rightarrow t' = t''$

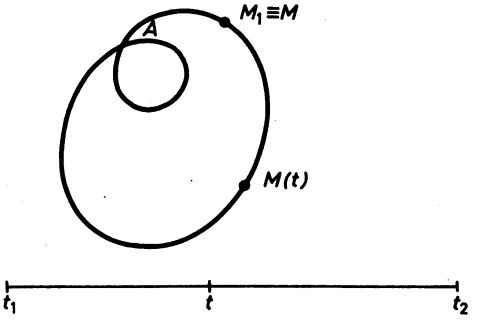


Fig. 6.79

Curva cerrada normal

$$[t_1\ t_2] \longrightarrow E_2$$
$$t \longrightarrow M(t)$$

aplicación *no* inyectiva

$$\left.\begin{matrix} t'_A \longrightarrow A \\ t''_A \longrightarrow A \end{matrix}\right\} t'_A \neq t''_A$$

$$M(t_1) = M(t_2)$$

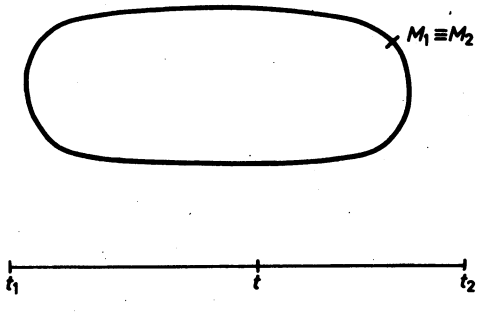


Fig. 6.80

Curva cerrada simple
(o curva de Jordan)

$$[t_1\ t_2] \longrightarrow E_2$$
$$t \longrightarrow M(t)$$

aplicación inyectiva

$$M(t') = M(t'') \Rightarrow t' = t''$$
$$M(t_1) = M(t_2)$$

Todas las curvas que se han visto son regulares. Ahora establezcamos ejemplos de curvas *regulares a trozos.*

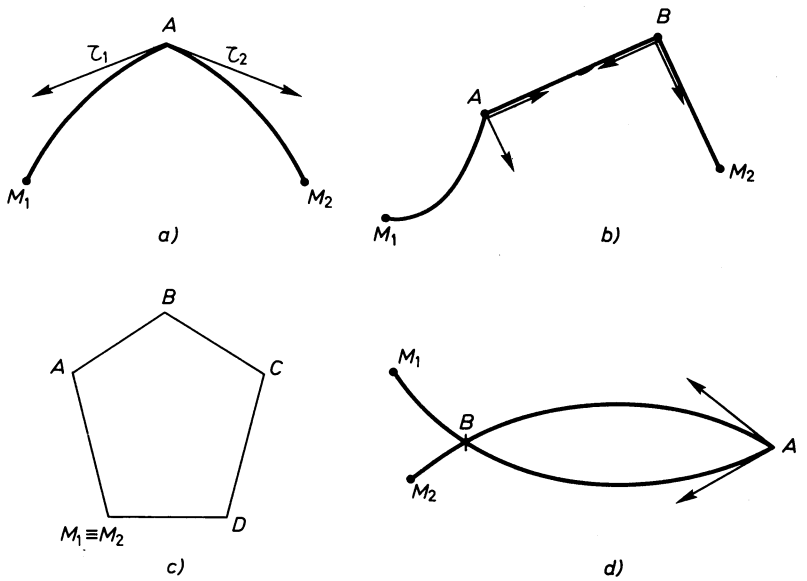


Fig. 6.81

1.º Curva simple no cerrada (Fig. 6.81, *a*)
En el punto A existe una discontinuidad o salto de la tangente, representado por las tangentes no coincidentes τ_1, τ_2 a izquierda y derecha respectivamente El trozo $\widehat{M_1A}$ es regular, así como el trozo $\widehat{AM_2}$.

2.º Curva simple no cerrada (Fig. 6.81, *b*).
En los puntos A y B hay discontinuidades o saltos de la tangente.
Los trozos $\widehat{M_1A}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{BM_2}$ son regulares.

3.º Polígono; curva cerrada simple (Fig. 6.81, *c*).

En los puntos *ABCDM* hay discontinuidades o saltos de la tangente.

Los trozos M_1A, AB, BC, CD, DM_2 son regulares (o sea los lados del polígono).

4.º Curva no cerrada (Fig. 6.80, *d*).

El punto *A* es un punto de discontinuidad o salto de la tangente.

Los trozos M_1A, AM_2 son regulares.

Cuando en una curva no se incluye algún extremo o los dos extremos, se conviene en llamarla *abierta* por el extremo correspondiente. Esta denominación no tiene relación con la de curva cerrada, que hemos dado anteriormente.

6.612. Curvas y gráficas de funciones

Intentemos dejar bien clara la distinción entre *curva* y *gráfica de una función*.

Una función es una aplicación y por lo tanto a cada valor de la x corresponde un valor *único* de la $f(x)$, luego la gráfica será tal que cualquier recta paralela al eje y la corta a lo sumo en un punto.

Toda gráfica de función continua es una curva. Una gráfica de función con puntos de discontinuidad aislados está formada por varias funciones continuas, cada una de las cuales es una curva.

Luego toda gráfica de función continua o con puntos aislados de discontinuidad es una curva o un conjunto de curvas respectivamente.

Una curva en general no es una función sino una «colección de funciones» a la que habíamos convenido en llamar «función multiforme»; y a cada una de las funciones que la componen, «ramas» de la función multiforme.

Ejemplos aclaratorios:

1.º) Gráfica de función continua que es una *curva regular* (también llamada arco de curva). (Fig. 6.82).

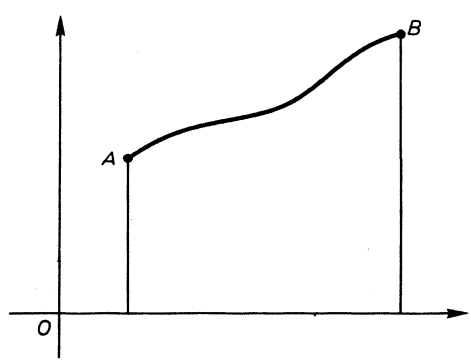


Fig. 6.82

2.º) Gráfica de función continua que es una curva *regular a trozos*, pues el punto *C* tiene dos tangentes o sea, es anguloso. Cada uno de los trozos $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ es un arco de curva (o curva regular). (Fig. 6.83).

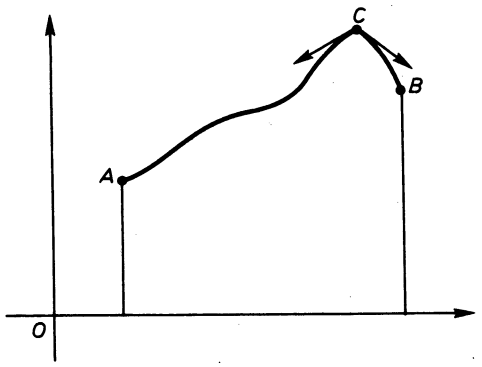


Fig. 6.83

3.º) Gráfica de función discontinua con puntos de discontinuidad aislados que está formada por *tres curvas* (Fig. 6.84):

1. $\overset{\frown}{AB}$ curva regular.
2. $\overset{\frown}{CDE}$ curva regular a trozos formada por los arcos de curva *CD* y *DE*.
3. $\overset{\frown}{FG}$ curva regular.

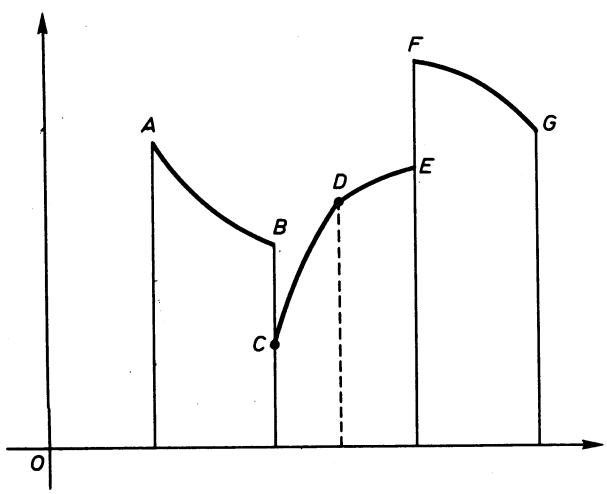


Fig. 6.84

4.º) Gráfica de función multiforme formada por las tres funciones o ramas I, II y III (Fig. 6.85).

Este conjunto de funciones representa una sola *curva regular*.

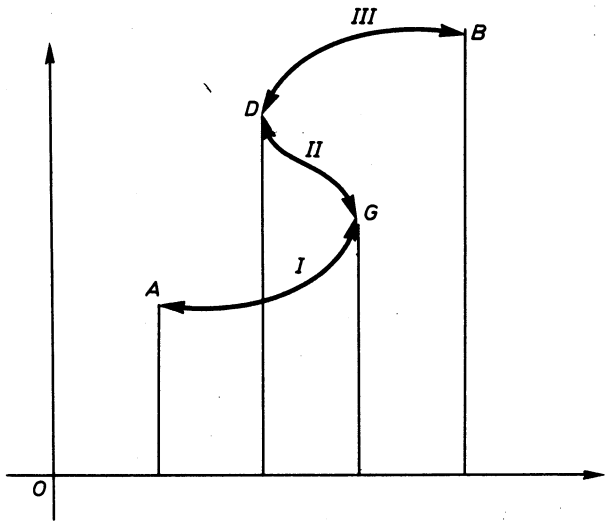


Fig. 6.85

5.º) Gráfica de función multiforme formada por las ramas I, II y III (Fig. 6.86). Este conjunto de funciones o ramas representa una curva *regular a trozos.* Los trozos de que está formada son los arcos de curva $\widehat{AE}$ y $\widehat{EB}$.

El estudio del movimiento de un punto ha servido para establecer el concepto de curva. Se ha visto que era una aplicación continua y derivable (al menos a tro-

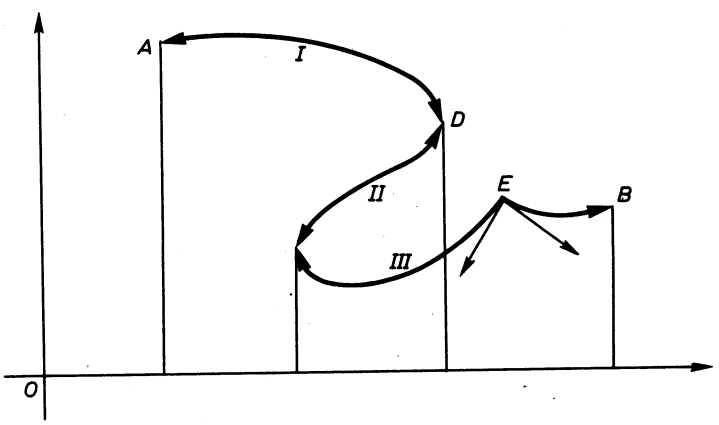


Fig. 6.86

zos) de un intervalo de la recta real en el plano euclídeo E_2. Esta aplicación está determinada por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}$$ que se denominan *ecuaciones paramétricas de la curva.*

Estas expresiones comprenden como caso particular la expresión cartesiana explícita de una función que, como quedó dicho, también es curva (o conjunto de curvas) pues $y = f(x)$ puede escribirse

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = f(t) \end{array}\right\}$$

Si se hubieran utilizado coordenadas polares se hubiese obtenido

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = \varphi(t) \\ \rho = \psi(t) \end{array}\right\},$$

sirviendo las mismas definiciones. La expresión polar $\rho = f(\omega)$ queda incluida en la expresión anterior, para el caso particular

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = t \\ \rho = f(t) \end{array}\right\}$$

6.613. Concepto de curvatura. Centro y radio

Supóngase un alambre recto de material flexible, por ejemplo, cobre (Fig. 6.87). Se marcan en el alambre dos puntos A, B a la distancia ΔS. Si se dobla hasta tomar

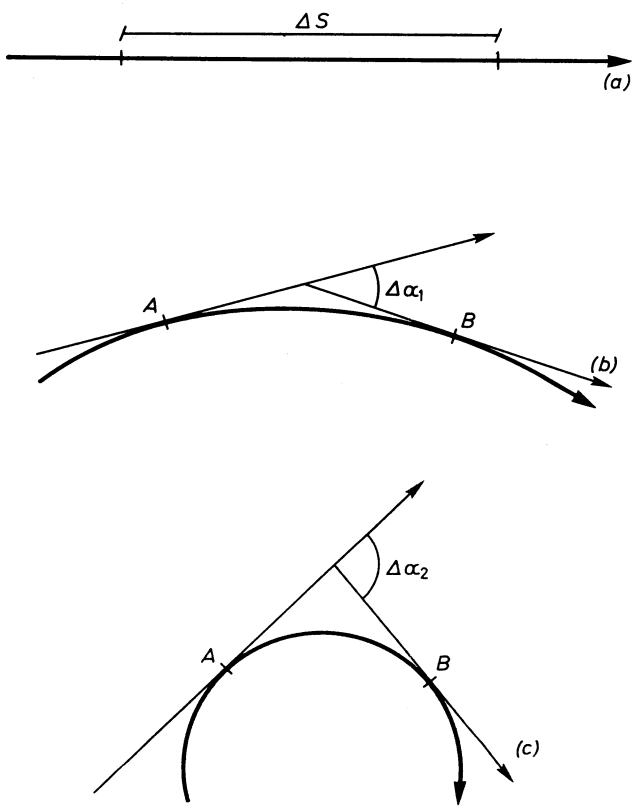


Fig. 6.87

la forma que se aprecia en (*b*), el ángulo que forman las tangentes en A y B respectivamente es $\Delta\alpha_1$. Si se dobla más todavía, hasta que tome la forma (*c*) y se mide el ángulo que forman las tangentes en A y B, resulta ser

$$\Delta\alpha_2 > \Delta\alpha_1.$$

Es decir, si se mantienen los puntos A y B fijos sobre el alambre, «cuanto mayor sea el grado de doblamiento mayor será el ángulo que forman las tangentes en A y B".

Vamos a proceder ahora en sentido contrario (Fig. 6.88). Fijamos las tangentes de manera que formen un ángulo $\Delta\alpha$, y vamos deformando el alambre y adaptándolo a las tangentes fijas, midiendo cada vez la longitud.

$$\overset{\frown}{AB} = \Delta S,\ \overset{\frown}{A_1B_1} = \Delta S_1,\ \overset{\frown}{A_2B_2} = \Delta S_2 \text{ etc.}$$

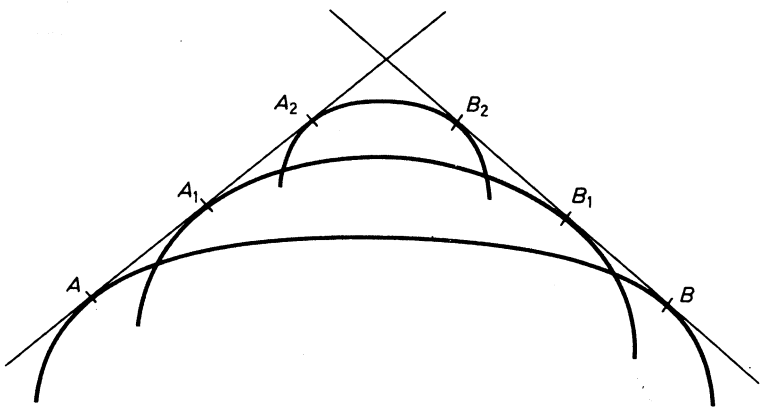


Fig. 6.88

Se observa que «cuanto mayor sea el grado de doblamiento menor será la longitud del arco entre puntos de contacto».

Estas consideraciones llevan a establecer las siguientes definiciones:

$$\overset{\frown}{AB} = \Delta S$$

Curvatura media del arco $\overset{\frown}{AB} = C_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta S}$ (Fig. 6.89)

La *curvatura en un punto A* será lógicamente el límite de la curvatura media de un arco $\overset{\frown}{AB}$ cuando la longitud del arco tiende a cero, o sea cuando $B \to A$.

$$C_A = \lim_{B\to A} C_{\overset{\frown}{AB}} = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \frac{d\alpha}{dS}$$

Por definición, *radio de curvatura en un punto* $A = R_A = \dfrac{1}{C_A}$, luego $C_A = \dfrac{1}{R_A}$.

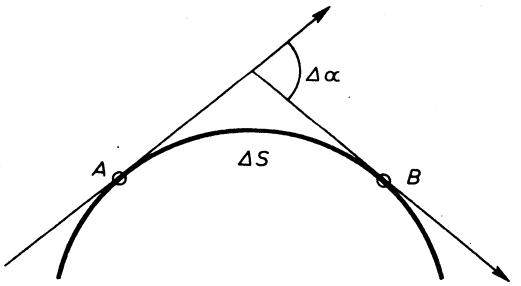


Fig. 6.89

Si sobre la perpendicular a la tangente llevamos del mismo lado que la curva la longitud R_A (Fig. 6.90), se obtiene el punto K_A que se define como *centro de curvatura*.

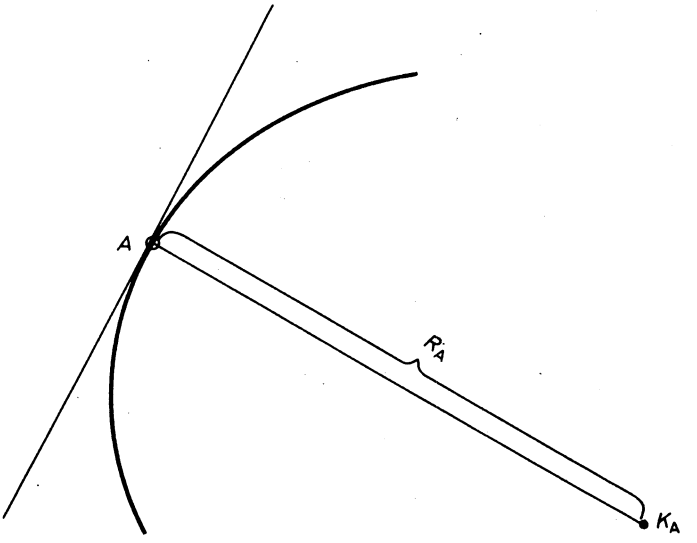


Fig. 6.90

Al variar A sobre la curva variará K_A. La curva que describe K_A se denomina *evoluta* de la curva dada.

Círculo de curvatura es el círculo de centro K_A y de radio R_A.

6.614. Cálculo de la curvatura. Coordenadas del centro

Sobre la figura 6.91 se calcula:

$$\alpha = \operatorname{artg} y' \quad ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$C_A = \frac{d\alpha}{dS} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}} = \frac{\dfrac{1}{1 + y'^2} y''}{(1 + y'^2)^{1/2}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

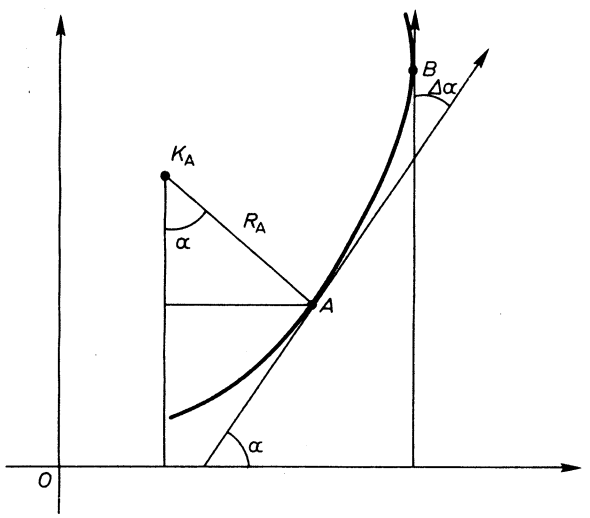


Fig. 6.91

$$R_A = \frac{1}{C_A} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

$$X_{K_A} = X_A - R_A \operatorname{sen} \alpha = X_A - \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = X_A - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}$$

$$Y_{K_A} = Y_A + R_A \cos \alpha = Y_A + \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}} = Y_A + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

Si la curva viene expresada en forma paramétrica,

$$\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\},$$

basta sustituir en las fórmulas anteriores los valores de y', y'' que se indican a continuación:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}$$

Deduzcamos ahora la expresión de la curvatura en coordenadas polares, para lo cual vamos a establecer primero el valor del ángulo V que forma la tangente con el radio del vector.

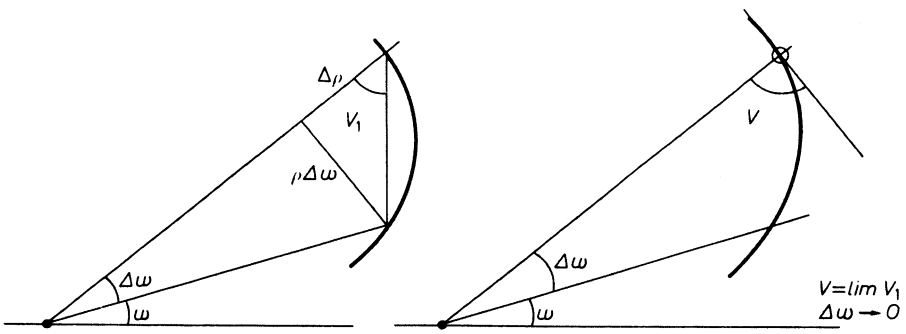


Fig. 6.92

$$\operatorname{tg} V_1 = \frac{\rho\,\Delta\omega}{\Delta\rho} = \frac{\rho}{\frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}}$$

$$\left[\operatorname{tg} V = \lim_{\Delta\omega\to 0} \operatorname{tg} V_1 = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{\rho}{\frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}} = \frac{\rho}{\rho'}\right]$$

Con este antecedente, puede deducirse la curvatura

$$\alpha = V + \omega \qquad V = \operatorname{artg}\frac{\rho}{\rho'} \qquad ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\omega$$

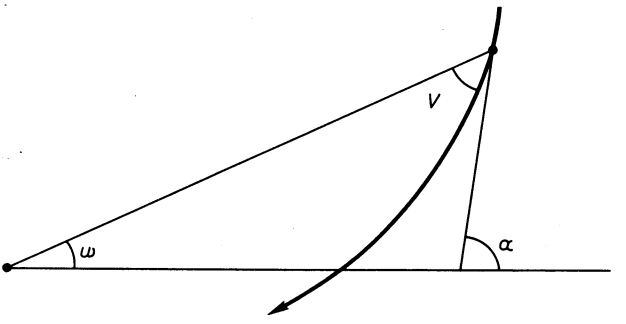


Fig. 6.93

$$C_A = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dfrac{d\alpha}{d\omega}}{\dfrac{ds}{d\omega}} = \frac{1 + \dfrac{1}{1 + \rho^2/\rho'^2}\dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}}{(\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}}$$

Dedúzcanse, como ejercicio, las coordenadas del centro de curvatura.

6.615. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

6.6150.
Determínese la ecuación de la recta que pasa por $A(\rho = 3, \omega = 45°)$ y $B(\rho = 5, \omega = 30°)$.

6.6151.
Calcúlese la ecuación de la circunferencia de centro C $(\rho_0 = 2, \omega_0 = \pi/2)$ y de radio $r = 3$.

6.6152.
Escríbase la ecuación de la elipse $2x^2 + 3y^2 = 6$ en forma polar.

6.6153.
Dibújese la curva $y = 5(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

6.6154.
Dibújese la parábola $y = 6x^2 - 5x + 4$.

6.6155.
Hállense las coordenadas del centro y radio de curvatura de $y = 3x^2 - 7x + 4$ en $x = 1$.

6.6156.
Hállense las coordenadas del centro y radio de curvatura de $\rho = \omega^2 - 2\omega$ en $\omega = \pi/3$.

6.6157.
Determínese la curvatura de $y = Lx$ en $x = 2$.

6.6158.
Dibújese la curva logarítmica decimal a escala. A partir de ella, por método gráfico, dibújese $y = \log_3 x$.

6.6159.
Dibújese $y = -x^3 + 2x^2 - 8x$.

6.7

Idea elemental de superficies. Curvas alabeadas

6.71. Introducción. Referencia de coordenadas cilíndricas y esféricas

6.72. Superficie. Concepto. Formalización

6.73. Función real de dos variables reales

6.74. Distintas formas de expresar la ecuación de una superficie

6.75. Superficies elementales

6.76. Curvas alabeadas. Concepto. Formalización

6.77. Distintas formas de expresar las ecuaciones de una curva

6.78. Estudio de algunas curvas: cúbicas, hélices

6.79. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas

6.7

Idea elemental de superficies. Curvas alabeadas

6.71. INTRODUCCION. REFERENCIAS DE COORDENADAS CILINDRICAS Y ESFERICAS

Vamos a considerar como espacio en el que se estudian las superficies y curvas alabeadas del presente capítulo el espacio tridimensional euclídeo E_3. Se sabe que en tal espacio se puede definir una referencia de coordenadas cartesianas $R = \{O; \bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3\}$ que permite identificar cada punto con una terna ordenada de números reales, sus coordenadas $(x_1\ x_2\ x_3)$; es decir, existe una biyección

$$\begin{aligned} E_3 &\longrightarrow \mathfrak{R}^3 \\ X &\longrightarrow (x_1\ x_2\ x_3) \end{aligned}$$

Por comodidad, elegiremos una referencia ortonormal o sea $\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker), como es habitual. Los ejes de coordenadas y, por lo tanto, las coordenadas de un punto se designarán (x, y, z) en vez de $(x_1\ x_2\ x_3)$.

$$|\bar{u}_1| = |\bar{u}_2| = |\bar{u}_3| = 1$$

En el espacio tridimensional existen otras referencias de coordenadas que permiten sustituir los puntos por las ternas de números. Se describen a continuación dos referencias muy usadas.

I. *Referencia cilíndrica.* Considérense los ejes $x\ y\ z$ de la referencia cartesiana ortonormal anterior (Fig. 6.95).

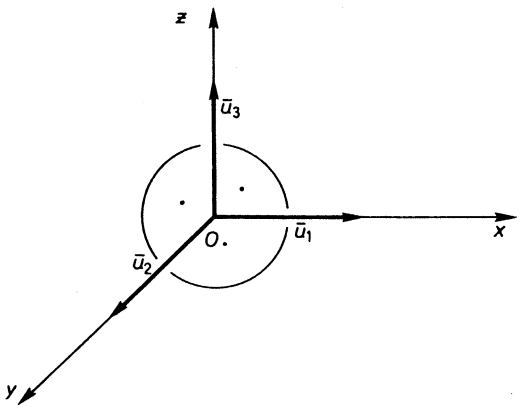


Fig. 6.94

Los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ sobre los ejes y, z, respectivamente, y el sentido de giro g en el plano $x0y$, constituyen la referencia cilíndrica.

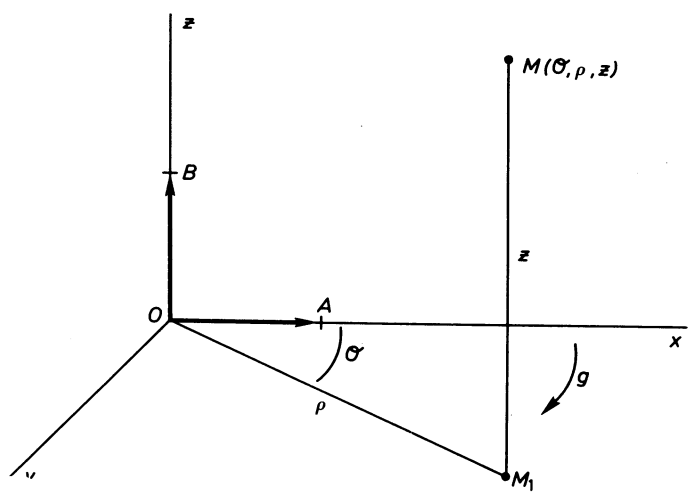


Fig. 6.95

Las coordenadas cilíndricas de un punto M son (θ, ρ, z):

$\theta = \widehat{XOM_1}$; M_1 = proyección de M sobre el plano $x0y$

$\rho = |\overrightarrow{OM_1}|$, con unidad $|\overrightarrow{OA}|$

$$z = \frac{\{\overrightarrow{M_1M}\}}{\{\overrightarrow{OB}\}}$$

Es habitual que $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}| = 1$.

Los campos de variabilidad de las coordenadas cilíndricas son:

$$\begin{aligned} &0 \leq \theta < 2\pi \\ &0 \leq \rho < +\infty \\ &-\infty < z < +\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto existe una biyección entre los puntos del espacio y las ternas de puntos de la semibanda infinita.

$$[0, 2\pi) \times [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) = [0, 2\pi) \times \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}$$

Las fórmulas de paso de coordenadas cilíndricas a cartesianas y viceversa son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{array} \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \operatorname{artg}\dfrac{y}{x} \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = z \end{array} \right\}$$

II. *Referencia esférica.* Sean los ejes $x\,y\,z$ de la figura 6.96.

Se fija un sentido de giro en el plano $x0y$, y una unidad de longitud.

Las coordenadas esféricas de un punto M son (θ, φ, ρ).

$\theta = \widehat{x0x_1}$ $\qquad 0 \leq \theta < 2\pi$

$\varphi = \widehat{zOM}$ $\qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$

$\rho = |\overline{OM}|$ $\qquad$ con la unidad fijada $0 \leq \rho < +\infty$

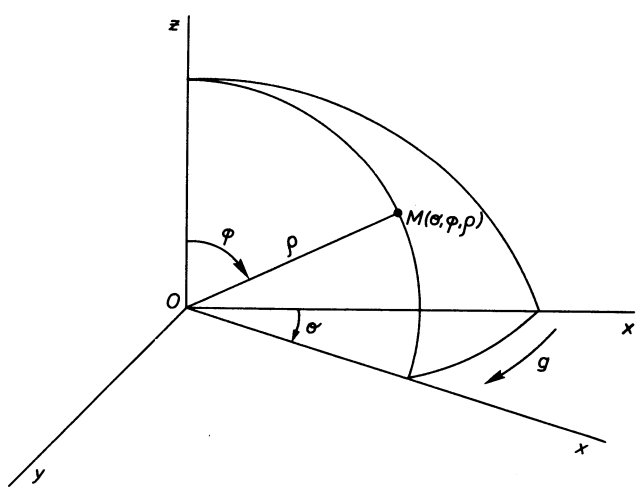


Fig. 6.96

Esta referencia permite establecer una biyección entre los puntos del espacio y los del ortoedro infinito $[0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, +\infty)$.

Las fórmulas de paso de coordenadas esféricas a cartesianas y viceversa son

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \theta = \operatorname{artg} \dfrac{y}{x} \\ \varphi = \operatorname{artg} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{array}\right\}$$

6.72. SUPERFICIE. CONCEPTO. FORMALIZACION

Supóngase una lámina metálica, flexible, perfectamente plana. Si la deformamos, se tendrá una *superficie* que puede considerarse como la imagen de una aplicación unívoca de la lámina antes de la deformación (o sea cuando es plana) en la lámina deformada. (Fig. 6.96.)

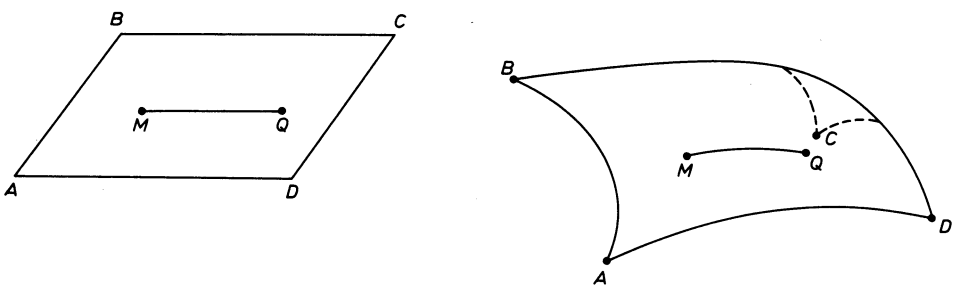


Fig. 6.97

La lámina plana se considera formando parte de un plano euclídeo. La lámina deformada «se ha salido del plano» y por lo tanto está incluida en el espacio euclídeo.

La lámina de la que hemos partido no tiene por qué ser rectangular; puede tener la forma de una región del plano.

A partir de estas ideas, se puede definir una *superficie* como la imagen de una aplicación de una región del plano euclídeo en el espacio euclídeo tridimensional.

Las coordenadas en E_2 se designarán (u, v) y las coordenadas en E_3 serán (x, y, z).

$$\begin{array}{c} R \xrightarrow{f} E_3 \\ {\scriptstyle R \subset E_2} \\ M = (u, v) \longrightarrow f(u, v) = M' = (x, y, z) \end{array}$$

M' es el punto imagen de M. M' tiene de coordenadas (x, y, z) y M tiene de coordenadas (u, v).

Las coordenadas (u, v) de M se llaman *coordenadas intrínsecas de* M'.

Conviene describir algunos ejemplos de superficies antes de dar precisión a la definición anterior, cosa que no se puede hacer hasta que se hable de función real de dos variables reales, en el apartado siguiente.

I. Supongamos una esfera de centro el origen y radio r. Si en las fórmulas de transformación de coordenadas esféricas a cartesianas se hace $\rho = r$, resultan:

$$\left.\begin{array}{l} x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \varphi \end{array}\right\}$$

Si hacemos $u = \varphi$, $v = \theta$, estas fórmulas definen una aplicación de la región

$$[0, 2\pi) \times [0, \pi] = R \subset E_2 \text{ en } E_3.$$

A continuación representamos gráficamente la aplicación. Téngase en cuenta que cada línea trazada sobre R se aplica en la línea del mismo grosor trazada sobre la superficie esférica. (Fig. 6.98).

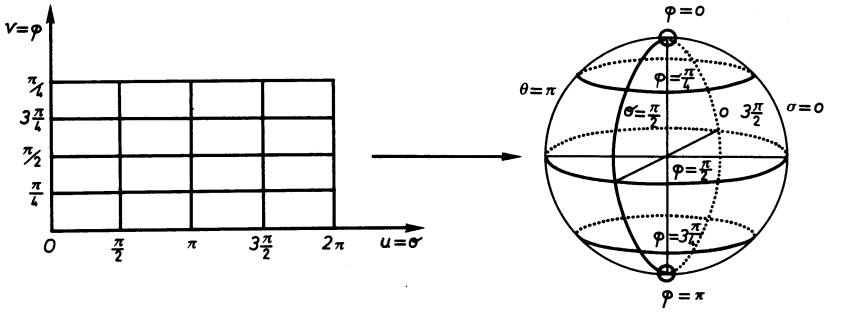


Fig. 6.98

En este caso la región R que se aplica en E_3 es un rectángulo.

La aplicación es

$$M = (u, v) \longrightarrow M' = (r \operatorname{sen} v \cos u, r \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, r \cos v)$$

La imagen de la aplicación, o sea la superficie, es una esfera.

II. Supongamos un cono de revolución de eje el eje z y de semiángulo α.

En las ecuaciones de transformación de esféricas a cartesianas hacemos $\varphi = \alpha$ y resulta

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \alpha \end{array}\right\}$$

Si en estas ecuaciones se hacen $u = \theta$, $v = \rho$, obtenemos una aplicación de la región

$$[0, 2\pi) \times [0, +\infty) = R \text{ en } E_3.$$

Representemos gráficamente la aplicación, siguiendo el criterio del ejemplo anterior (Fig. 6.99).

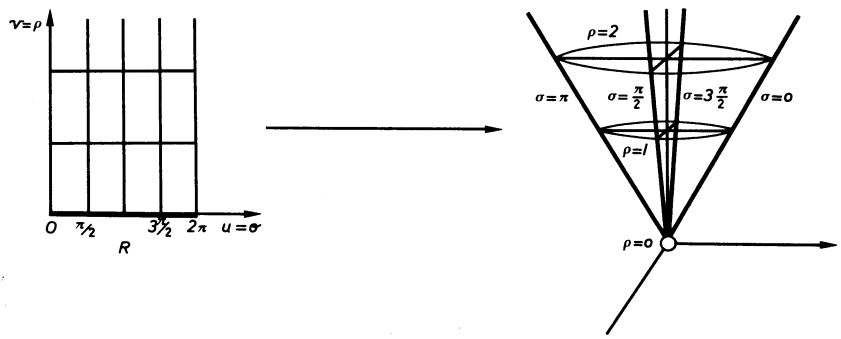


Fig. 6.99

En este caso la región R es un rectángulo infinito. La aplicación es

$$M(u, v) \longrightarrow M'(v \text{ sen } \alpha \cos u, v \text{ sen } \alpha \text{ sen } u, v \cos \alpha)$$

La imagen de la aplicación es una superficie cónica.

III. Consideremos un cilindro de revolución de radio r y eje el eje z. En las fórmulas de paso de coordenadas cilíndricas a cartesianas hacemos $\rho = r$ y resulta

$$\left\{\begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \text{ sen } \theta \\ z = z \end{array}\right\}$$

Si se hace $u = \theta$, $v = z$ se tendrá definida la transformación. Gráficamente se representa en la figura 6.99.

En este caso la región R es una banda infinita. La aplicación es

$$M(u, v) \longrightarrow M'(r \cos u, r \text{ sen } u, v)$$

La imagen de la aplicación es una superficie cilíndrica.

IV. Sea la ecuación de la superficie que se obtiene al girar sobre su eje $y = \text{Ch } x$ que tiene como ecuación $z = \text{Ch } \sqrt{x^2 + y^2}$; pero puede escribirse en coordenadas cilíndricas:

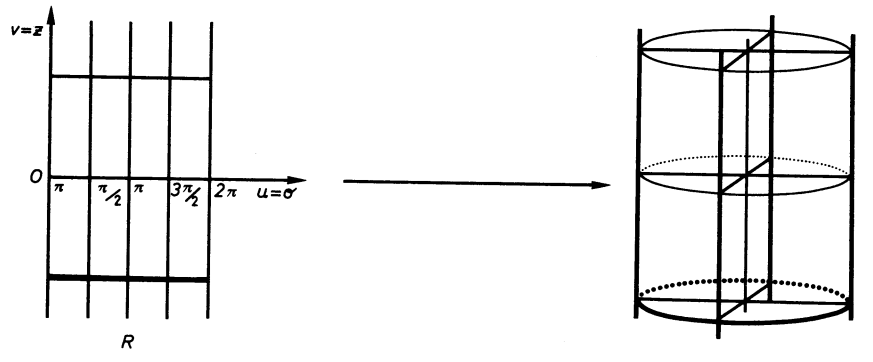


Fig. 6.100

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = \text{Ch}\,r \end{array}\right\}$$

Si se hacen $\theta = u, r = v$ se obtiene una aplicación de la región $[0, 2\pi) \times [0, +\infty) = R$ en E_3.

La aplicación se representa gráficamente en la figura 6.101.

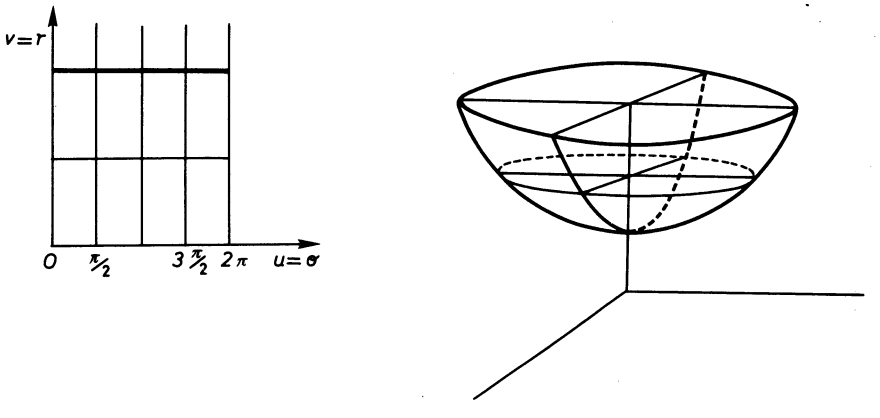


Fig. 6.101

Ejercicios

1. Escríbase la aplicación del ejercicio IV.
2. Desarróllese completamente

$$\begin{array}{l} x = a\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = b\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ z = c\cos\varphi \end{array}$$

que representa un elipsoide (forma de huevo).

La ecuación cartesiana del elipsoide es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; si $a = b = c = R$ resulta la esfera del ejercicio 1.

6.73. FUNCION REAL DE DOS VARIABLES REALES

Se llama función real de dos variables reales a una aplicación de un subconjunto de $\mathfrak{R}^2$ en $\mathfrak{R}$.

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} \mathfrak{R} \\ A \subset \mathfrak{R}^2 \\ (xy) \longrightarrow z = f(xy) \end{array}$$

El conjunto A es abierto o es un sobreconjunto de un abierto.

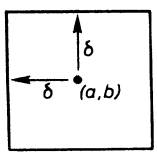
Análogamente a lo que le ocurre a la función real de una variable real, que puede representarse en el plano mediante su gráfica, también en este caso podemos acudir a la representación gráfica en el espacio de la función de dos variables reales. Entendemos por gráfica de la función anterior el conjunto de puntos de E_3 cuyas coordenadas cartesianas son $(x, y, f(xy))$ para $(x, y) \in A$.

La gráfica puede representarse en el espacio, construyendo una maqueta o, lo que es más corriente, recurriendo a las técnicas de la perspectiva caballera.

Límite. Se define

$$\lim_{(xy)\to(ab)} f(xy) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / |(xy) - (ab)| < \delta \Rightarrow |f(xy) - A| < \varepsilon$$

Representamos $|(xy) - (ab)| < \delta$ como el entorno de centro (a, b) y radio δ; y se toma indistintamente un círculo o un cuadrado.



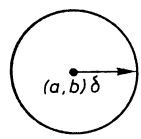


Fig. 6.102

$|x - a| < \delta \wedge |y - b| < \delta$ $\qquad$ $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

Función continua. Se dice que $f(xy)$ es continua en $(a\,b)$ cuando

$$\lim_{(xy)\to(ab)} f(xy) = f(ab)$$

Derivación parcial. (Fig. 6.103.)

Sea la función $f(xy)$ definida en las proximidades de (ab) y en el mismo punto (a, b).

Se define

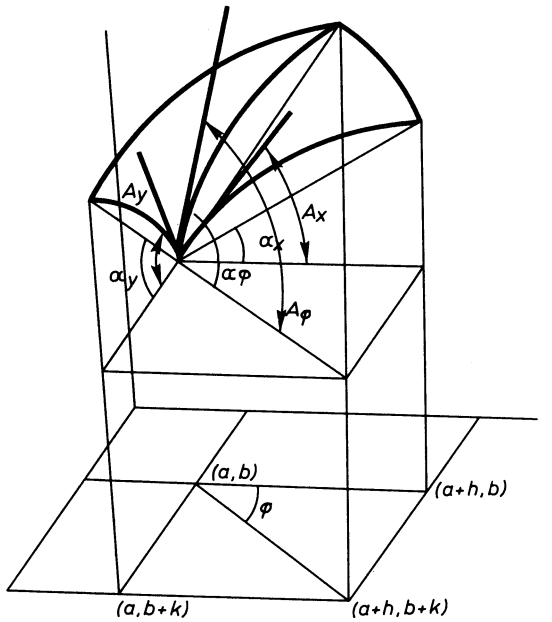


Fig. 6.103

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial x}\right] = \lim_{(a,b)\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta_x f(xy)}{\Delta x}\right]_{(ab)}$$

O sea

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial x}\right]_{(ab)} = \operatorname{tg} A_x$$

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial y}\right]_{(ab)} = \lim_{y \to 0} \operatorname{tg} \alpha_y = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{\Delta_y f(xy)}{\Delta y}\right]_{(ab)}$$

Es decir

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial y}\right]_{(ab)} = \operatorname{tg} A_y$$

Acabamos de definir la *derivación parcial*, según la dirección del eje x, y según la dirección del eje y. En el primer caso consideramos la y constante y en el segundo la x constante.

Ejemplo

$$z = 2xy + x^3 + y^2 + 6y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y + 3x^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y + 6$$

Las derivaciones, según las direcciones de los ejes, son casos muy particulares. Vamos a definir la derivación según una dirección cualquiera, determinada por el ángulo φ.

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}; \quad r_\varphi = \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial r_\varphi}\right]_{(ab)} = \lim_{r_\varphi \to 0} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b)}{r_\varphi}$$

$$\frac{f(a + h, b + k) - f(ab)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + h^2}} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b + k)}{h} +$$

$$+ \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$

Tomando límites en ambos miembros para $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$ y haciendo

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial x} = z_x, \quad \frac{\partial f(xy)}{\partial y} = z_y, \quad \frac{\partial f(xy)}{\partial r_\varphi} = z_\varphi$$

resulta la importante fórmula

$$\boxed{z_\varphi = z'_x \cos\varphi + z'_y \operatorname{sen}\varphi}$$

$z_\varphi = \operatorname{tg} A_\varphi$ da la pendiente según la dirección φ.

La fórmula anterior se traduce en la siguiente circunferencia indicatriz de pendientes de la figura 6.104.

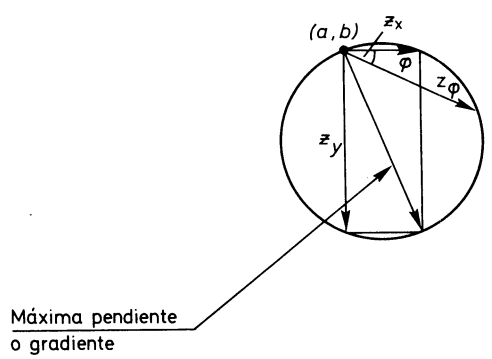


Fig. 6.104

Las derivadas parciales de orden dos, tres, etc., se definen de manera lógica. Se usa la notación

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \text{ etc.}$$

Las funciones reales de variable real sólo tienen dos tipos de derivadas: a derecha e izquierda. Una función es derivable si ambas coinciden.

En el caso de funciones de dos variables existen infinitas derivadas, una para cada dirección.

Se dice que una función es derivable según una dirección φ cuando $z_\varphi = {}_{\varphi+\pi}$.

Función de clase k. Se dice que una función es de clase k cuando tiene derivadas continuas hasta las de orden k.

6.74. DISTINTAS FORMAS DE EXPRESAR LA ECUACION DE UNA SUPERFICIE

Según hemos visto, una superficie es una aplicación de una región de E_2 en E_3

$$R \xrightarrow{f} E_3$$
$$(u, v) \longrightarrow f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Esta aplicación equivale a las tres funciones de dos variables $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Esto se puede constatar volviendo a leer los ejemplos del apartado 6.72.

El conjunto de tres funciones reales forman lo que se llama una función vectorial tridimensional. Se puede decir que una superficie es una *función vectorial tridimensional de dos variables reales.*

Al definir matemáticamente una superficie se requiere que no tenga variaciones infinitesimales bruscas; que sea suficientemente regular.

Lo que se diga de las tres funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, se dice de la superficie. Por ejemplo, la superficie es de clase k si las tres funciones son de clase k.

En geometría diferencial se exige que las tres funciones sean *al menos de clase* 3, para que se cumplan las condiciones de regularidad.

Resumiendo: Una superficie es la imagen de una aplicación f de una región de E_2 en E_3.

$$E_2 \supset R \xrightarrow{f} E_3$$
$$(u, v) \longrightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Las tres funciones de dos variables reales que definen la aplicación han de ser al menos de clase 3.

La gráfica de una función es una superficie pero no recíprocamente. (Demuéstrese como ejercicio.)

La expresión de una superficie

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u\,v) \\ y &= y(u\,v) \\ z &= z(u\,v) \end{aligned}\right\}$$

se conoce como *ecuaciones paramétricas.*

Si entre las tres ecuaciones se elimina $(u\ v)$ se tendrá la

$$\textit{ecuación implícita}\ \phi\ (x\ y\ z) = 0$$

Si la z está despejada, bien a partir de $\phi(x\ y\ z) = 0$, bien a partir de las ecuaciones paramétricas,

$$\left.\begin{matrix} x = x(u\ v) \\ y = y(u\ v) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u = U(xy) \\ v = V(xy) \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = z(u\ v) = z(U(xy),\ V(xy)),$$

se conoce como *ecuación explícita.*

El paso de una expresión a otra no tiene dificultades teóricas.

Ejemplo.

Las ecuaciones paramétricas del elipsoide son

$$\left.\begin{matrix} x = a\cos u \operatorname{sen} v \\ y = b\cos u \cos v \\ z = c \operatorname{sen} u \end{matrix}\right\}$$

Eliminemos (u, v):

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \cos^2 u\,(\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v) = \cos^2 u \\ \dfrac{z^2}{c^2} = \operatorname{sen}^2 u \end{matrix}\right\}$$

Sumando miembro a miembro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \textit{ecuación implícita}$$

La ecuación explícita se obtiene despejando z

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

6.75. SUPERFICIES ELEMENTALES

En este epígrafe se establecen las ecuaciones de las superficies más elementales, escogiendo los ejes en la forma más adecuada, para que la ecuación resulte sencilla.

Las escribiremos en forma implícita, pues en forma paramétrica, prácticamente, están en el apartado 6.72.

La superficie más elemental es el *plano*, pues las variables están elevadas al exponente unidad.

En orden de complicación siguen las ecuaciones de segundo grado.

Esfera. (Fig. 6.104.)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

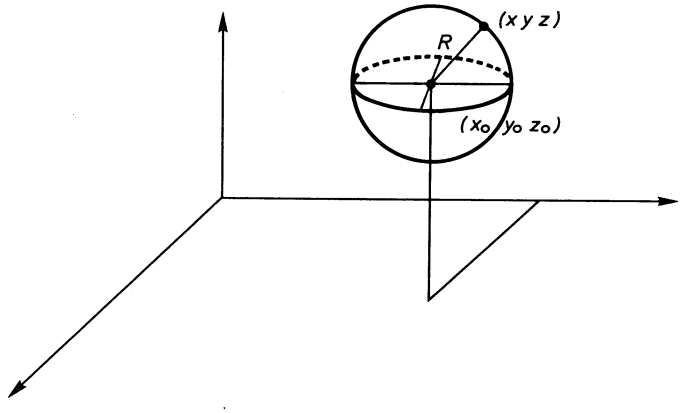


Fig. 6.105

Características:

1.ª) Es ecuación de segundo grado.

2.ª) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales.

Ejercicio

Hállese el radio y las coordenadas del centro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$

$$x_0 = \frac{-6}{2} = -3, \quad y_0 = \frac{+8}{2} = 4, \quad z_0 = \frac{-4}{2} = -2;$$

$$29 - R^2 = 20; \quad R = \sqrt{9} = 3$$

Superficie cilíndrica. Es la superficie engendrada por las rectas que tienen una dirección fija y se apoyan en una curva llamada directriz del cilindro. Por ejemplo (Fig. 6.106), vamos a tomar como directriz el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ contenido en el plano $x0y$ y como dirección de las generatrices la del eje z.

Ecuación $x^2 + y^2 = r^2$

Tomemos como directriz (ahora Fig. 6.107) la parábola $z^2 = 2py$ contenida en el plano $y0z$, y como dirección de las generatrices la del eje x.

Ecuación $z^2 = 2py$

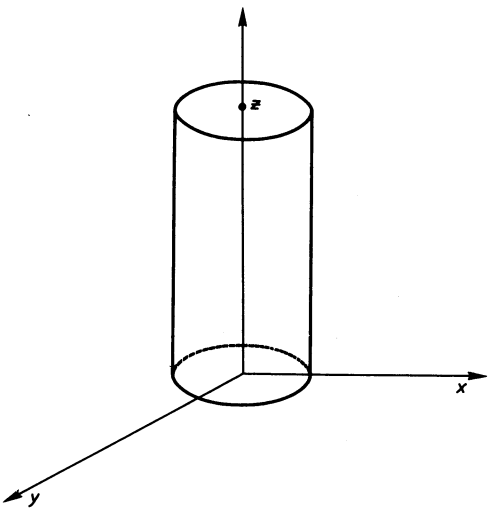


Fig. 6.106

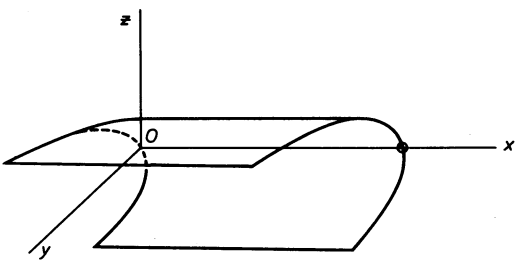


Fig. 6.107

Considérese por último la superficie cilíndrica de directriz la hipérbola

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

y generatrices paralelas al eje z. (Fig. 6.107.)

$$\text{Ecuación } \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Ejercicios

1) Escríbase la ecuación de cilindros elípticos de generatrices paralelas al eje y, y cuya directriz sea una elipse contenida en el plano $x0y$ y de ejes paralelos a $0x$, $0z$.

2) Ecuación de la superficie cilíndrica engendrada por las rectas paralelas a la distancia 3 a la recta $x = y = z$.

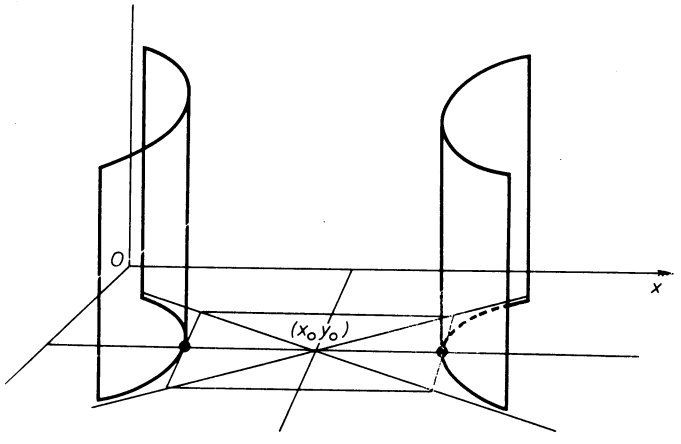


Fig. 6.108

Superficie cónica. Es la superficie engendrada por las rectas que unan un punto fijo llamado vértice del cono con los puntos de una curva llamada directriz del cono.

Vamos a deducir la ecuación del cono de revolución que tiene como eje el eje x y como semiángulo cónico α. (Fig. 6.109.)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{y^2 + y^2}}{x}$$

$$\boxed{y^2 + z^2 - x^2 \operatorname{tg} \alpha = 0}$$

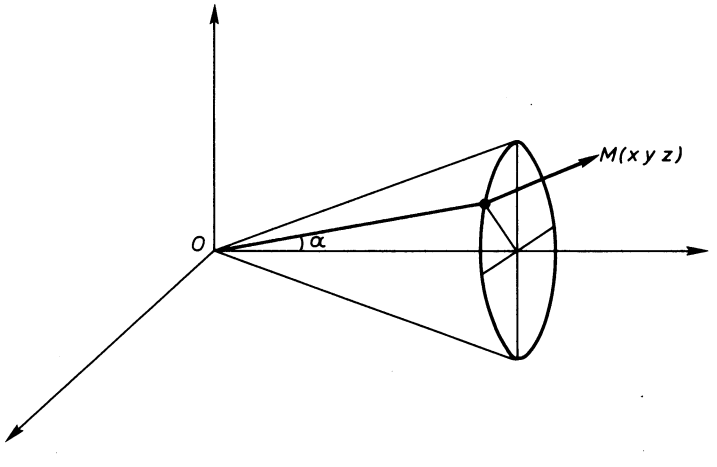


Fig. 6.109

Cono de vértice el origen y directriz la hipérbola

$$\left\{\begin{array}{r} y^2 - z^2 = 1 \\ x = k \end{array}\right\}$$

Sea $P = (K, \sqrt{1 + \beta^2}, \beta)$ un punto genérico de la hipérbola directriz.

Ecuación de OP

$$\frac{x}{K} = \frac{y}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \frac{z}{\beta}$$

$$\beta = \frac{Kz}{x}, \quad \frac{y}{\sqrt{1 + \frac{K^2 z^2}{x^2}}} = \frac{x}{K} \Rightarrow \quad \boxed{x^2 = K^2(y^2 - z^2)}$$

Ejercicio

Ecuación del cono de vértice $V = (1, 0, 0)$, y directriz

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y^2 + 2z^2 = 1 \end{array}\right\}$$

Elipsoide. (Fig. 6.110.)

Tiene de ecuación referida a sus planos de simetría como planos coordenados

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Al cortar por planos cualesquiera, las curvas de intersección son elipses.

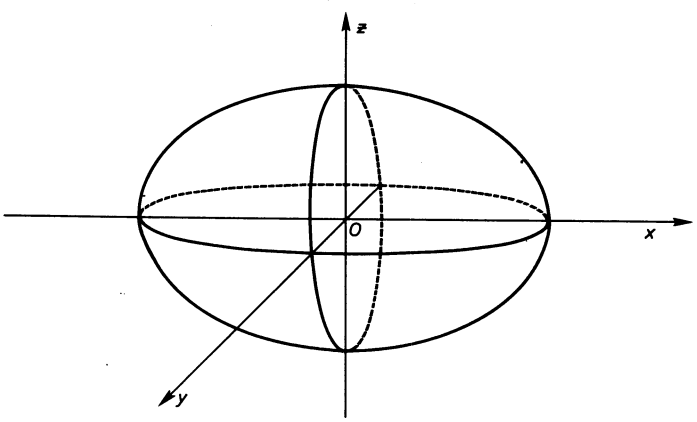


Fig. 6.110

Si $a = b$ o $b = c$ o $a = c$, es una superficie de revolución.
Si $a = b = c = R$ resulta una esfera de radio R.
Se llama «elipsoide imaginario» a la superficie que representa la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Esta superficie no tiene existencia en el campo real, que es el que estamos estudiando.

Hiperboloide. Refirámosle también a sus planos de simetría. Existen dos tipos:
1.º) Hiperboloide de una hoja (Fig. 6.110).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = +1$$

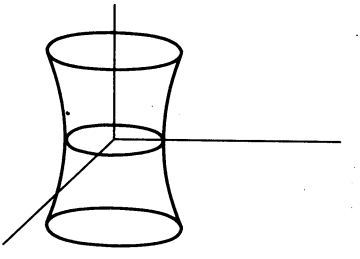


Fig. 6.111

Los planos paralelos a $x0y$ se cortan según elipses; los paralelos a los otros planos coordenados, según hipérbolas.

Es una superficie reglada, es decir formada por rectas llamadas generatrices. En efecto, la ecuación se puede escribir

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

o sea

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

El sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{x}{a}\right) \end{array}\right\}$$

representa una recta para cada valor de λ. Si eliminamos λ, para lo cual basta multiplicar miembro a miembro, obtenemos la ecuación del hiperboloide, luego éste contiene todas las rectas anteriores que constituyen un sistema de generatrices. Existe otro sistema representado por

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 + \dfrac{x}{a}\right) \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \end{array}\right\}$$

2.º) *Hiperboloide de dos hojas* (Fig. 6.112).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

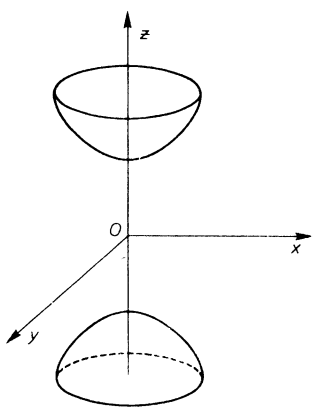


Fig. 6.112

Este hiperboloide no admite generación rectilínea.

En cualquiera de los casos, si $a = b$ resultan hiperboloides de revolución.

Paraboloide. Vamos a referirnos a sus dos planos de simetría como planos $x0z$, $y0z$, y a su vértice (punto de intersección del eje con las superficies) como origen

1.º $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz$ *Paraboloide elíptico* (Fig. 6.113).

Los planos paralelos al $x0y$ lo cortan según elipses. Los planos paralelos a $y0z$ o $x0z$ lo cortan según parábolas.

Si $a = b$ resulta un paraboloide de revolución.

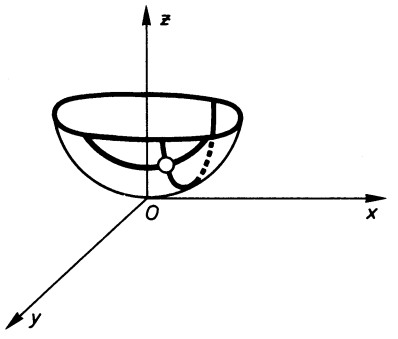


Fig. 6.113

2.º $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ *Paraboloide hiperbólico* (Fig. 6.114).

Los planos paralelos al $x0y$ lo cortan según hipérbolas. Los planos paralelos a $y0z$ o $x0z$ lo cortan según parábolas.

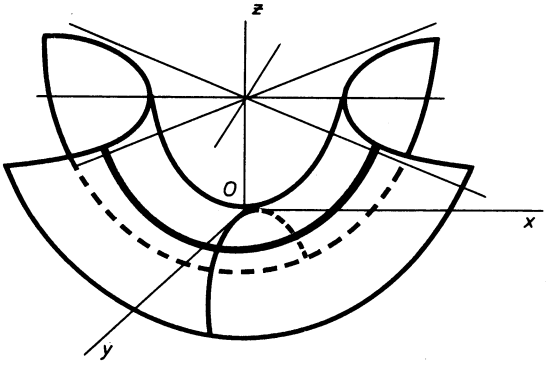


Fig. 6114.

Todas las superficies que se acaban de estudiar, cuya ecuación es de segundo grado, se conocen con el nombre de *cuádricas*.

6.76. CURVAS ALABEADAS. CONCEPTO. FORMALIZACION

En el capítulo anterior se han estudiado las curvas planas, es decir, las curvas contenidas en un plano. Existen muchas curvas que no están contenidas en ningún plano. El mundo físico nos ofrece muchas imágenes que sugieren este tipo de curvas no planas que se llaman *curvas alabeadas*. Un ejemplo puede ser un muelle.

Otro ejemplo puede ser el borde de una montura de caballo. (Fig. 6.115.)

Para imaginar la curva alabeada se puede suponer que resulta de deformar un alambre flexible de cualquier manera, es decir, sin especial cuidado para que se mantenga plano.

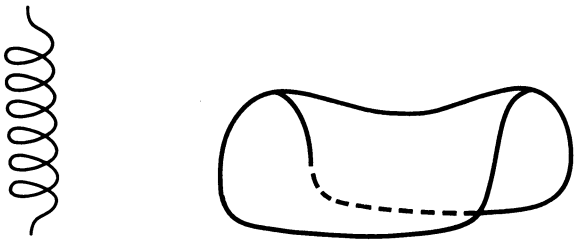


Fig. 6.115

Definimos la *curva alabeada* como la imagen de una aplicación de un segmento en E_3.

$$\begin{array}{l} R \xrightarrow{f} E_3 \\ {\scriptstyle R \subset \mathbb{R}} \\ \quad t \longrightarrow f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

Esta aplicación es una función vectorial de una variable real. (Se ha visto que la superficie es la imagen de una función vectorial de dos variables reales.) Decir que la aplicación f es continua o derivable equivale a decir que lo son las tres funciones que la definen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Es costumbre exigir (con el fin de que las curvas sean suficientemente regulares) que la aplicación anterior f sea al menos de tercera clase, es decir, que tenga al menos derivadas terceras continuas. Curvas *analíticas* son las de clase infinito o sea las que tienen derivadas continuas de todos los órdenes.

6.77. DISTINTAS FORMAS DE EXPRESAR LAS ECUACIONES DE UNA CURVA

La expresión de una curva

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\}$$

tal como se ha definido, se llama *forma paramétrica.*

Si se elimina el parámetro t entre las tres ecuaciones anteriores, despejando t en una de ellas y sustituyendo en las otras dos, se tendrán las ecuaciones en *forma implícita*

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x\,y\,z) = 0 \\ f_2(x\,y\,z) = 0 \end{array} \right\}$$

En este caso, la curva viene expresada como intersección de dos superficies. Ya se vio que una recta en el espacio puede venir dadà como intersección de dos planos.

Ejemplo

Sea la curva alabeada

$$\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = L(t - 1) \\ z = 2t^2 + t \end{cases}$$

Para expresarla implícitamente despejamos t de la primera ecuación y sustituimos en las otras dos

$$t = \frac{x - 5}{3} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y - L\dfrac{x - 8}{3} = 0. \\ \\ 9z - 3(x - 5) - 2(x - 5)^2 = 0 \end{array}}$$

ecuaciones implícitas

6.78. ESTUDIO DE ALGUNAS CURVAS: CUBICAS. HELICES

Cerrando el capítulo, se procede a estudiar algún tipo particular de curva alabeada. Se llama *cúbica* la curva tal que un plano la corta en tres puntos como máximo (Fig. 6.116). Las ecuaciones son del tipo:

$$x = \frac{At^3 + Bt^2 + Ct + D}{at^3 + bt^2 + ct + d} \quad y = \frac{A't^3 + B't^2 + C't + D'}{at^3 + bt^2 + ct + d}$$

$$z = \frac{A''t^3 + B''t^2 + C''t + D''}{at^3 + bt^2 + ct + d}$$

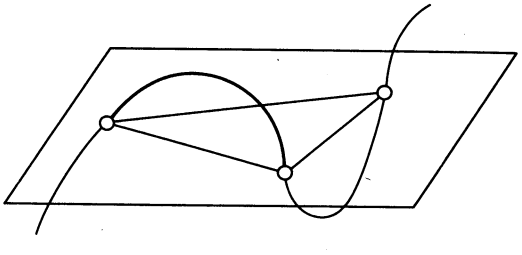


Fig. 6.116

En efecto, sea un plano cualquiera $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$.

Para hallar los valores de t correspondientes a los puntos de intersección basta sustituir en la ecuación del plano los $x\,y\,z$ de la curva y resolver en t.

$$(A\alpha + A'\beta + A''\gamma + a\delta)t^3 + (B\alpha + B'\beta + B''\gamma + b\delta)t^2 + (C\alpha + C'\beta + C''\gamma + c\delta)t + \\ + (D\alpha + D'\beta + D''\gamma + d\delta) = 0$$

Como es una ecuación de tercer grado existen tres puntos de corte como máximo, c.q.d.

Las *hélices* son curvas que tienen forma de muelle. Trazadas sobre una superficie cilíndrica tienen la propiedad de cortar según un ángulo constante las generatrices del cilindro. Consideramos sólo cilindros de revolución.

La hélice es la curva descrita por un punto móvil que gira alrededor de un eje con velocidad de rotación constante al mismo tiempo que se traslada paralelamente al eje con velocidad constante (Fig. 6.117).

$$M(r\cos\omega t,\ r\,\text{sen}\,\omega t,\ vt)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\omega t \\ y = r\,\text{sen}\,\omega t \\ z = vt \end{array}\right\}$$

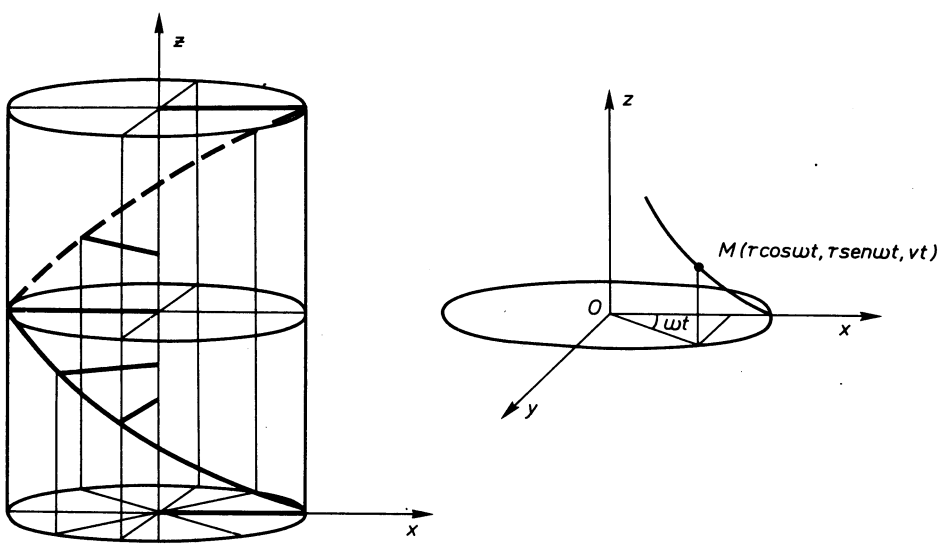


Fig. 6.117

Si se elimina t

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

$$\frac{y}{x} = \text{artg}\,\omega t \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{y}{x} = \text{artg}\frac{\omega}{v}z}$$

forma implícita

p es el paso y se relaciona con v y ω según se deduce de la figura 6.118.

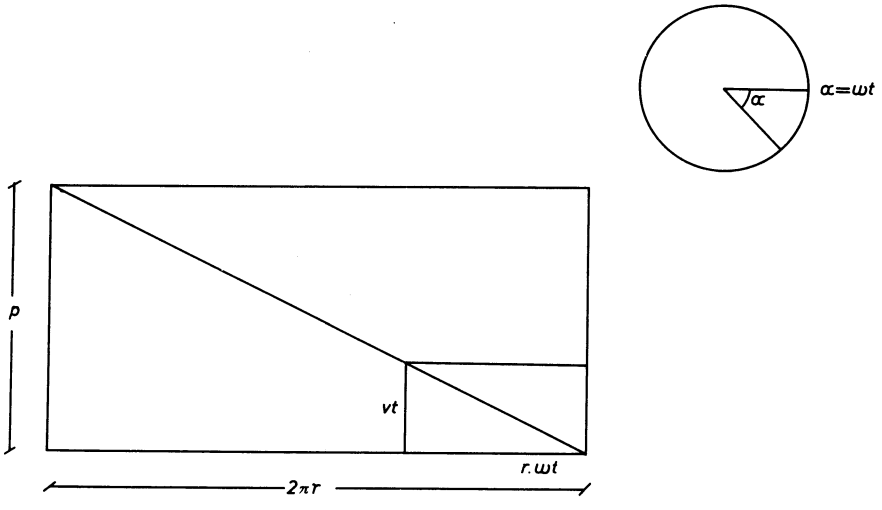


Fig. 6.118

Se llama *helicoide o superficie helicoidal* la engendrada por una recta paralela al plano $x0y$, que se apoya en el eje z y en la hélice.

Esta superficie es la que forma el forjado que sostiene una escalera de caracol. En la figura 6.117 vienen indicadas en negro algunas de las generatrices del helicoide.

La hélice anterior, en forma implícita, viene dada como intersección del cilindro

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

y el helicoide

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{p} z$$

p es el desnivel que se salva en una vuelta completa; en el caso de la escalera, p es la distancia entre pisos consecutivos.

6.79. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

6.790.

Dada la superficie $z = x^2 - 3y^2 + 7x + 6$, exprésese en forma implícita y paramétrica.

6.791.

Dada la superficie

$$\begin{cases} x = 2u + 3v \\ y = 5u + v \\ z = u - u \end{cases}$$

exprésese en forma implícita.

6.792.
Dada la función $z = x^2 + 3y$, hállese z'_{φ}, para $\varphi = \pi/3$.

6.793.
Determínese la ecuación de la superficie cilíndrica de revolución, de eje paralelo a z, radio $= 3$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

6.794.
Calcúlese la ecuación del cono de revolución de semiángulo $\alpha = \pi/3$, de vértice el origen y de eje la recta $x = y = z$.

6.795.
Dada la curva $x = 3t$, $y = t^2 - 6$, $z = L(t - 2)$, hállense sus ecuaciones cartesianas.

6.796.
Se establecen las ecuaciones de la curva

$$\begin{aligned} 3x - 3y + 5z &= 0 \\ x^2 - y^2 + 8z &= 0; \end{aligned}$$

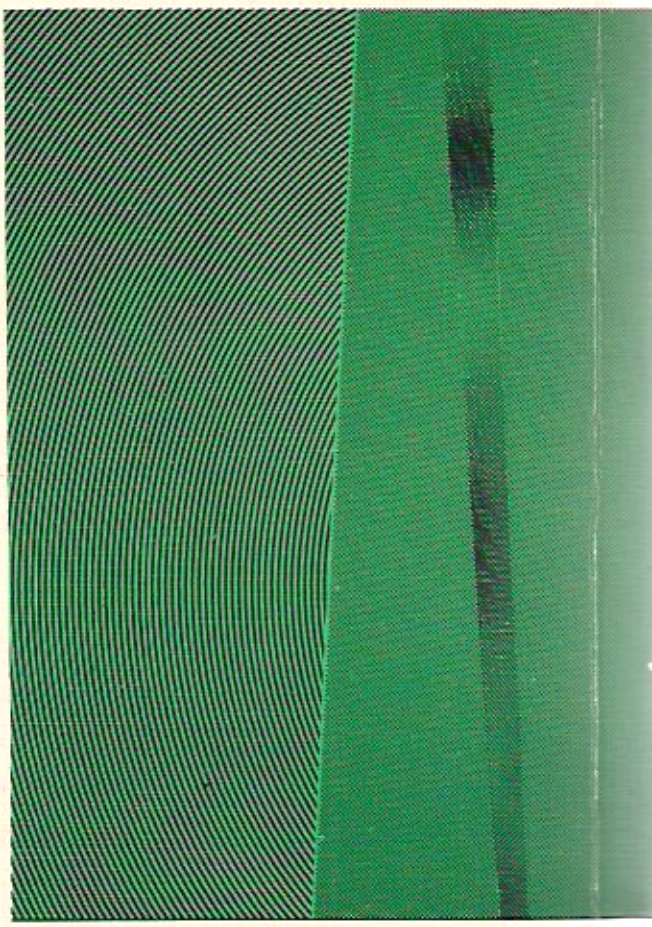
exprésese en forma paramétrica.

6.797.
Dada la elipse

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 5 \operatorname{sen} t \\ z = 0, \end{cases}$$

exprésese en forma paramétrica.

6.798.
Exprésese la superficie $x^2 - y^2 + 3x = 0$ en coordenadas esféricas.

6.799.
Exprésese la ecuación de una superficie cilíndrica en el sistema más adecuado, y lo mismo para una esfera.

Alhambra
Ciencias y Técnica